

Математика пәні бойынша
Республикалық оқушылар олимпиадасының
екінші (аудандық) кезеңі (2022-2023 оқу жылы)

10-сынып

Жұмыс уақыты: 2 сағат 30 минут.
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

1. ABC үшбұрышында AK биссектрисасы жүргізілген. AB және AC түзулерінен сәйкесінше E және D ($E \neq A, D \neq A$) нүктелері алынған. E және D нүктелері BC түзуіне қатысты бір жақта жатыр және $EB = BK, CD = CK$. Егер $EBCD$ төртбұрышының диагональдарының қиылысу нүктесі AK түзуінің бойында жатса, онда $AB = AC$ болатынын дәлелдеңіз.

2.

$$a + (b,c) = b + (c,a) = c + (a,b)$$

болатындай барлық натурал a, b, c табыңыз.

Бұл жердегі (x,y) – x және y сандарының ең үлкен ортақ бөлгіші.

3. $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$ натурал сандар болсын. Кез келген екі a_i, a_j ($i < j$) сандары үшін $a_i + a_j, a_i a_j$ және $|a_i - a_j|$ сандары жазылып алынады. Жазылып алынған сандардың ішінде ең көп дегенде қанша сан тақ сан болатынын табыңыз.

4. Кез келген нақты a, b сандары үшін келесі теңсіздікті дәлелдеңіз

$$a^2 + 141ab + 5476b^2 \geq 5a + 1364b - 512.$$

Второй (районный) этап
Республиканской олимпиады школьников
по математике (2022-2023 учебный год)

10 класс

Время работы: 2 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

1. В треугольнике ABC проведена биссектриса AK . На прямой AB и AC выбраны точки E, D ($E \neq A, D \neq A$) соответственно. Оказалось, что точки E, D лежат по одну сторону от прямой BC и $EB = BK, CD = CK$. Докажите, что если точка пересечения диагоналей чебырхугольника $EBCD$ лежит на прямой AK то $AB = AC$.

2. Найдите все натуральные a, b, c такие, что

$$a + (b,c) = b + (c,a) = c + (a,b).$$

Здесь (x,y) – наибольший общий делитель чисел x и y .

3. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$ – натуральные числа. Для каждой пары чисел a_i, a_j при $i < j$ выписываются числа $a_i + a_j, a_i a_j$ и $|a_i - a_j|$. Найдите наибольшее возможное значение количества нечётных чисел среди выписанных.

4. Докажите, что для любых действительных a, b справедливо неравенство

$$a^2 + 141ab + 5476b^2 \geq 5a + 1364b - 512.$$