9 класс

1. Сколько делителей числа $20! \times 21!$ являются точными квадратами или точными кубами?

(Для любого натурального числа n величина $n!$ (факториал натурального числа n) определяется как произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно: $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$.)

Ответ: 82506.

Решение: Разложим число $20! \times 21!$ на простые множители. Простыми делителями числа $20! \times 21!$ являются числа $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$.

Число 2 в каноническом разложении числа $20!$ на простые множители входит с показателем степени

$$v_2(20!) = \left\lfloor \frac{20}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{2^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{2^5} \right\rfloor + \cdots = 10 + 5 + 2 + 1 + 0 + \cdots = 18.$$

Число 2 в каноническом разложении числа $21!$ на простые множители входит с показателем степени

$$v_2(21!) = \left\lfloor \frac{21}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{21}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{21}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{21}{2^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{21}{2^5} \right\rfloor + \cdots = 10 + 5 + 2 + 1 + 0 + \cdots = 18.$$

Значит, число 2 в каноническом разложении числа $20! \times 21!$ на простые множители входит с показателем степени

$$v_2(20!) + v_2(21!) = 18 + 18 = 36.$$

Аналогично можно найти с каким показателем степени входят в каноническое разложение числа $20! \times 21!$ на простые множители другие простые делители этого числа.

Таким образом, получаем, что

$$20! \times 21! = 2^{36} \times 3^{17} \times 5^8 \times 7^5 \times 11^2 \times 13^2 \times 17^2 \times 19^2.$$

Любой делитель числа $20! \times 2!$ можно представить в виде

$$2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \cdot 13^f \cdot 17^g \cdot 19^h,$$

где $0 \le a \le 36$, $0 \le b \le 17$, $0 \le c \le 8$, $0 \le d \le 5$, $0 \le e \le 2$, $0 \le f \le 2$, $0 \le g \le 2$, $0 \le h \le 2$.

Делитель числа $20! \times 21!$ будет точным квадратом, если показатели степеней простых чисел в его каноническом разложении будут кратны 2. Для показателя a существует 19 вариантов ($a \in \{0, 2, 4 \ldots, 36\}$), для b – 9 вариантов ($b \in \{0, 2, 4 \ldots, 16\}$), для c – 5 вариантов ($c \in \{0, 2, 4, 6{,}8\}$), для d – 3 варианта ($d \in \{0, 2, 4\}$), для e – 2 варианта ($e \in \{0, 2\}$), для f – 2 варианта ($f \in \{0, 2\}$), для g – 2 варианта ($g \in \{0, 2\}$), для h – 2 варианта ($h \in \{0, 2\}$).

Всего
$$19 \times 9 \times 5 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = \boxed{82080}$$
делителей числа $20! \times 21!$, которые являются точными квадратами.

Делитель числа $20! \times 21!$ будет точным кубом, если показатели степеней простых чисел в его каноническом разложении будут кратны 3. Для показателя a существует 13 вариантов ($a \in \{0, 3, 6 \ldots, 36\}$), для b – 6 вариантов ($b \in \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$), для c – 3 варианта ($c \in \{0, 3, 6\}$), для d – 2 варианта ($d \in \{0, 3\}$), для e – 1 вариант ($e = 0$), для f – 1 вариант ($f = 0$), для g – 1 вариант ($g = 0$), для h – 1 варианта ($h - 0$).

Всего
$$13 \times 6 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = \boxed{468}$$
делителей числа $20! \times 21!$, которые являются точными кубами.

Теперь найдём количество делителей числа $20! \times 21!$, которые являются одновременно и точными квадратами, и точными кубами, то есть шестой степенью натурального числа. У всех таких чисел оказатели степеней простых чисел в его каноническом разложении будут кратны 6. Для показателя a существует 7 вариантов ($a \in \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36\}$), для b – 3 варианта ($b \in \{0, 6, 12\}$), для c – 2 варианта ($c \in \{0, 6\}$), для d – 1 вариант ($d = 0$), для e – 1 вариант ($e = 0$), для f – 1 вариант ($f = 0$), для g – 1 вариант ($g = 0$), для h – 1 варианта ($h - 0$).

Всего
$$7 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = \boxed{42}$$
делителя числа $20! \times 21!$, которые являются одновременно и точными квадратами, и точными кубами.

По формуле включений и исключений количество делителей числа $20! \times 21!$ являются точными квадратами или точными кубами равно
$$82080 + 468 - 42 = \boxed{82506}.$$

Примерная схема оценивания

1. Найдено каноническое разложение числа $20! \times 21!$ – **3 балла**

2. Найдено количество делителей числа $20! \times 21!$, которые являются точными квадратами – **1 балл**

3. Найдено количество делителей числа $20! \times 21!$, которые являются точными кубами – **1 балл**

4. Найдено количество делителей числа $20! \times 21!$, которые являются одновременно и точными квадратами, и точными кубами – **1 балл**

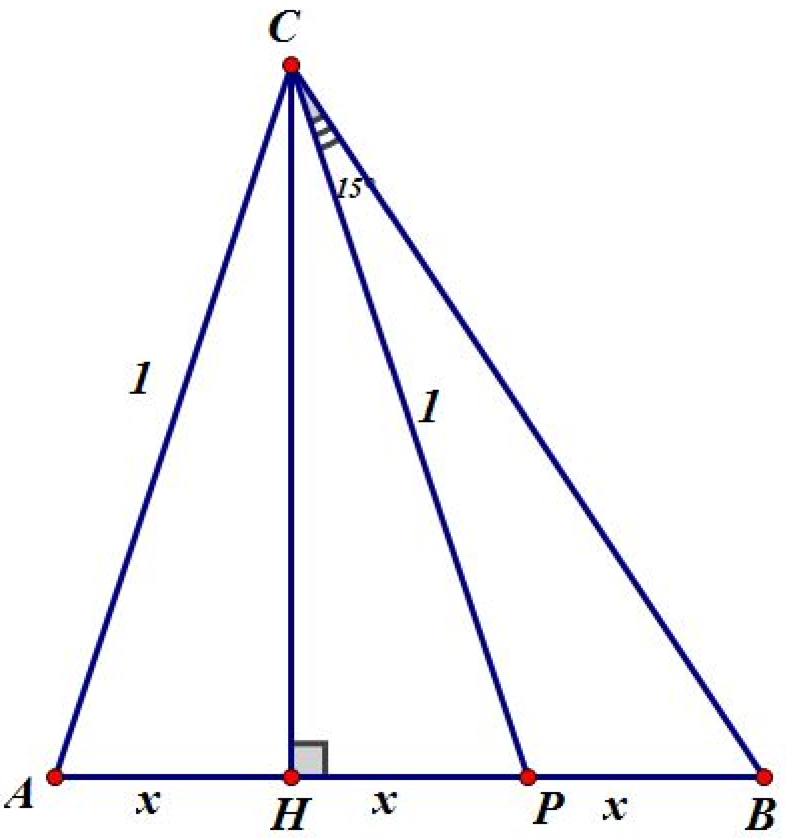
5. Найден ответ (с обоснованием) – **1 балл**

5'. Правильный ответ без обоснования – **0 баллов**

2. На стороне AB остроугольного треугольника ABC выбрана точка P так, что $AP : BP = 2 : 1$. Известно, что $AC = CP = 1$, $\angle BCP = 15°$. Найдите длину стороны BC.

Ответ: $BC = \sqrt{3x^2+1} = \sqrt{\dfrac{-1+9\sqrt{3}-3\sqrt{23-8\sqrt{3}}}{2}}$.

Решение. Проведём высоту CH, тогда H – середина основания AP ранобедренного треугольника ACP.



Значит,

$$AH = HP - PB = x.$$

Из прямоугольного треугольника CHP

$$CH = \sqrt{CP^2 - HP^2} = \sqrt{1-x^2}.$$

Из прямоугольного треугольника CHB

$$BC = \sqrt{CH^2 + HB^2} = \sqrt{1 - x^2 + 4x^2} = \sqrt{3x^2+1}.$$

По теореме косинусов из треугольника BCP

$$BP^2 = CP^2 + BC^2 - 2CP \cdot BC \cdot \cos 15° \iff$$

$$x^2 = 1 + 3x^2 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3x^2+1} \cdot \cos 15° \iff$$

$$2\sqrt{3x^2+1} \cdot \cos 15° = 2x^2 + 2 \iff$$

$$\sqrt{3x^2+1}\cdot\cos 15^\circ = x^2+1.$$

так как $x > 0$, то можем возвести обе части последнего уравнения в квадрат. Получим

$$(3x^2+1)\cdot\cos^2 15^\circ = x^4+2x^2+1 \iff$$

$$(3x^2+1)\cdot\frac{1+\cos 30^\circ}{2} = x^4+2x^2+1 \iff$$

$$(3x^2+1)\cdot\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = x^4+2x^2+1 \iff$$

$$(3x^2+1)\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{4} = x^4+2x^2+1 \iff$$

$$(3x^2+1)\cdot(2+\sqrt{3}) = 4x^4+8x^2+4 \iff$$

$$(6+3\sqrt{3})x^2+(2+\sqrt{3}) = 4x^4+8x^2+4 \iff$$

$$x^4+(2-3\sqrt{3})x^2+2-\sqrt{3}=0 \iff$$

$$\left[\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{-2+3\sqrt{3}-\sqrt{23-8\sqrt{3}}}{2}},\\ x &= \sqrt{\frac{-2+3\sqrt{3}+\sqrt{23-8\sqrt{3}}}{2}}.\end{aligned}\right.$$

Заметим, что $0 < x < 1$, поэтому второй коренеь не подходит. Таким образом

$$x = \sqrt{\frac{-2+3\sqrt{3}-\sqrt{23-8\sqrt{3}}}{2}}.$$

Заметим, что

$$x = \sqrt{\frac{-2+3\sqrt{3}-\sqrt{23-8\sqrt{3}}}{2}} < \frac{1}{3}.$$

Поэтому

$$3x < 1 < \sqrt{3x^2+1},$$

то есть

$$AB < AC < BC.$$

Из чертежа видно, что при любом $x \in (0,1)$ можно построить треугольник, удовлетворяющий условию задачи. Более того, он будет остроугольный, так как

$$BC^2 = 3x^2+1 < AC^2+AB^2 = 1+9x^2.$$

Вычислим

$$BC = \sqrt{3x^2+1} = \sqrt{\frac{-1+9\sqrt{3}-3\sqrt{23-8\sqrt{3}}}{2}}.$$

Примерная схема оценивания

1. Проведена высота – **1 балл**
2. Выражена BC через x – **1 балл**
3. Применена теорема косинусоов – **1 балл**
4. Получено квадратное уравнение – **1 балл**
5. Найдены корни квадратного уравнения – **1 балл**
6. Правильно отбран корень – **1 балл**
7. Найден ответ (с обоснованием) – **1 балл**
7. Ответ (без обоснования) – **0 баллов**

3. Найдите все пары (x, y) целых чисел, удовлетворяющих неравенству

$$(x+y)^2 \leq 20+20x.$$

Ответ: Пусть $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

1) $x \in \left\{k^2-10k+m+4, k^2-10k+m+5, \ldots, k^2+10k+m+4\right\}$,
$y = 6-k^2-m$, если $m \in \{0, 1, 2, \ldots, k\}$.

2) $x \in \left\{k^2-10k+m+3, k^2-10k+m+4, \ldots, k^2+10k+m+5\right\}$,
$y = 6-k^2-m$, если $m \in \{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$.

3) $x \in \left\{k^2-10k+m+2, k^2-10k+m+3, \ldots, k^2+10k+m+6\right\}$,
$y = 6-k^2-m$, если $m \in \{2k+1, 2k+2, \ldots, 3k\}$.

4) $x \in \left\{k^2-10k+m+1, k^2-10k+m+3, \ldots, k^2+10k+m+7\right\}$,
$y = 6-k^2-m$, если $m \in \{3k+1, 3k+2, \ldots, 4k\}$.

5) $x \in \left\{k^2-10k+m, k^2-10k+m+3, \ldots, k^2+10k+m+8\right\}$,
$y = 6-k^2-m$, если $m \in \{4k+1, 4k+2, \ldots, 5k+1\}$.

6) $x \in \left\{k^2-10k+m-1, k^2-10k+m+3, \ldots, k^2+10k+m+9\right\}$,
$y = 6-k^2-m$, если $m \in \{5k+2, 5k+3, \ldots, 6k+1\}$.

7) $x \in \left\{k^2-10k+m-2, k^2-10k+m+3, \ldots, k^2+10k+m+10\right\}$,
$y = 6-k^2-m$, если $m \in \{6k+2, 6k+3, \ldots, 7k+2\}$.

8) $x \in \left\{k^2-10k+m-3, k^2-10k+m+3, \ldots, k^2+10k+m+11\right\}$,
$y = 6-k^2-m$, если $m \in \{7k+3, 7k+4, \ldots, 8k+3\}$.

9) $x \in \left\{k^2-10k+m-4, k^2-10k+m+3, \ldots, k^2+10k+m+12\right\}$,
$y = 6-k^2-m$, если $m \in \{8k+4, 8k+5, \ldots, 9k+4\}$.

10) $x \in \left\{k^2-10k+m-5, k^2-10k+m+3, \ldots, k^2+10k+m+13\right\}$,
$y = 6-k^2-m$, $m \in \{9k+5, 9k+6, \ldots, 10k+4\}$.

Решение. Перепишем неравенство в виде:

$$x^2+2xy+y^2 \leq 20+20x \iff x^2+2(y-10)x+y^2-20 \leq 0.$$

Найдём дискриминант этого квадратного трёхчлена

$$\frac{D}{4} = (y-10)^2 - y^2 + 20 = -20y + 120 = 20(6-y).$$

Для того, чтобы неравенство имело действительные решения, необходимо, чтобы

$$\frac{D}{4} \geq 0 \iff y \leq 6.$$

Тогда решением неравенства будет

$$10 - y - \sqrt{\frac{D}{4}} \le x \le 10 - y + \sqrt{\frac{D}{4}}$$

Пусть $6 - y = 5k^2 + m$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, $m = 0, 1, 2, ..., 10k + 4 = 5(k+1)^2 - 1 - 5k^2$. Тогда $y = 6 - k^2 - m$.

Тогда

$$\frac{D}{4} = 100k^2 + 20m,$$

и

$$4 + k^2 + m - \sqrt{100k^2 + 20m} \le x \le 4 + k^2 + m + \sqrt{100k^2 + 20m}$$

Так как Так как x – целое, то

$$x \in \Big\{k^2 + m - \left\lfloor\sqrt{100k^2 + 20m}\right\rfloor + 4, k^2 + m - \left\lfloor\sqrt{100k^2 + 20m}\right\rfloor + 5,$$
$$k^2 + m - \left\lfloor\sqrt{100k^2 + 20m}\right\rfloor + 6, \ldots, k^2 + m + \left\lfloor\sqrt{100k^2 + 20m}\right\rfloor + 4\Big\}.$$

Здесь $\left\lfloor\sqrt{100k^2 + 20m}\right\rfloor$ – целая часть числа $\sqrt{100k^2 + 20m}$).

Рассмотрим несколько случаев

1) Если $m = 0, 1, 2, ..., k$, то

$$(10k)^2 = 100k^2 \le 100k^2 + 20m \le 100k^2 + 20m < 100k^2 + 20k + 1 = (10k + 1)^2.$$

Значит, $\left\lfloor\sqrt{100k^2 + 20m}\right\rfloor = 10k$.

Следовательно,

$$x \in \left\{k^2 - 10k + m + 4, k^2 - 10k + m + 5, \ldots, k^2 + 10k + m + 4\right\}.$$

2) Если $m = k + 1, k + 2, ..., 2k$, то

$$(10k + 1)^2 = 100k^2 + 20k + 1 < 100k^2 + 20m < 100k^2 + 40k + 4 = (10k + 2)^2.$$

Значит, $\left\lfloor\sqrt{100k^2 + 20m}\right\rfloor = 10k + 1$.

Следовательно,

$$x \in \left\{k^2 - 10k + m + 3, k^2 - 10k + m + 4, \ldots, k^2 + 10k + m + 5\right\}.$$

3) Если $m = 2k + 1, 2k + 2, ..., 3k$, то

$$(10k + 2)^2 = 100k^2 + 40k + 4 < 100k^2 + 20m < 100k^2 + 60k + 9 = (10k + 3)^2.$$

Значит, $\left\lfloor\sqrt{100k^2 + 20m}\right\rfloor = 10k + 2$.

Следовательно,

$$x \in \left\{k^2 - 10k + m + 2, k^2 - 10k + m + 3, \ldots, k^2 + 10k + m + 6\right\}.$$

4) Если $m = 3k + 1, 3k + 2, ..., 4k$, то

$$(10k + 3)^2 = 100k^2 + 60k + 9 < 100k^2 + 20m < 100k^2 + 80k + 16 = (10k + 4)^2.$$

Значит, $\left\lfloor\sqrt{100k^2+20m}\right\rfloor = 10k+3$.
Следовательно,

$$x \in \left\{k^2-10k+m+1, k^2-10k+m+3, \ldots, k^2+10k+m+7\right\}.$$

5) Если $m = 4k+1, 4k+2$,...,$5k+1$, то

$$(10k+4)^2 = 100k^2+80k+16 < 100k^2+20m < 100k^2+100k+25 = (10k+5)^2.$$

Значит, $\left\lfloor\sqrt{100k^2+20m}\right\rfloor = 10k+4$.
Следовательно,

$$x \in \left\{k^2-10k+m, k^2-10k+m+3, \ldots, k^2+10k+m+8\right\}.$$

6) Если $m = 5k+2, 5k+3$,...,$6k+1$, то

$$(10k+5)^2 = 100k^2+100k+25 < 100k^2+20m < 100k^2+120k+36 = (10k+6)^2.$$

Значит, $\left\lfloor\sqrt{100k^2+20m}\right\rfloor = 10k+5$.
Следовательно,

$$x \in \left\{k^2-10k+m-1, k^2-10k+m+3, \ldots, k^2+10k+m+9\right\}.$$

7) Если $m = 6k+2, 6k+3$,...,$7k+2$, то

$$(10k+6)^2 = 100k^2+120k+36 < 100k^2+20m < 100k^2+140k+49 = (10k+7)^2.$$

Значит, $\left\lfloor\sqrt{100k^2+20m}\right\rfloor = 10k+6$.
Следовательно,

$$x \in \left\{k^2-10k+m-2, k^2-10k+m+3, \ldots, k^2+10k+m+10\right\}.$$

8) Если $m = 7k+3, 7k+4$,...,$8k+3$, то

$$(10k+7)^2 = 100k^2+140k+49 < 100k^2+20m < 100k^2+160k+64 = (10k+8)^2.$$

Значит, $\left\lfloor\sqrt{100k^2+20m}\right\rfloor = 10k+7$.
Следовательно,

$$x \in \left\{k^2-10k+m-3, k^2-10k+m+3, \ldots, k^2+10k+m+11\right\}.$$

9) Если $m = 8k+4, 8k+5$,...,$9k+4$, то

$$(10k+8)^2 = 100k^2+160k+64 < 100k^2+20m < 100k^2+180k+81 = (10k+9)^2.$$

Значит, $\left\lfloor\sqrt{100k^2+20m}\right\rfloor = 10k+8$.
Следовательно,

$$x \in \left\{k^2-10k+m-4, k^2-10k+m+3, \ldots, k^2+10k+m+12\right\}.$$

10) Если $m = 9k+5, 9k+6, 10k+4$, то

$$(10k+8)^2 = 100k^2+160k+64 < 100k^2+20m < 100k^2+200k+100 = (10k+10)^2.$$

Значит, $\left\lfloor\sqrt{100k^2+20m}\right\rfloor = 10k+9$.
Следовательно,

$$x \in \left\{k^2-10k+m-5, k^2-10k+m+3, \ldots, k^2+10k+m+13\right\}.$$

Примерная схема оценивания

1. Неравенство переписано в виде квадратного неравенства от переменной x с параметром y – **1 балл**

2. Найден дискриминант – **1 балл**

3. Указано, что $y \leq 6$ – **1 балл**

4. Решено неравенство относительно x в действительных числах – **1 балл**

5. Записано множество решений x (через y и целую часть дискриминанта) – **1 балл**

6. Рассмотрены все случаи и для каждого случая записан ответ – **2 балла**

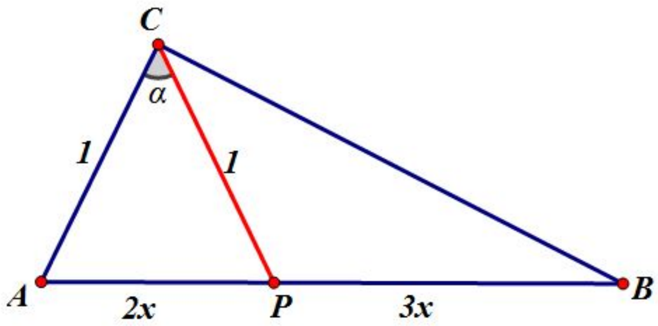
10 класс

1. На стороне AB остроугольного треугольника ABC выбрана точка P так, что $AP : BP = 2 : 3$. Известно, что $AC = CP = 1$. Найдите величину угла ACB, при котором площадь треугольника ABC максимальна.

Ответ: остроугольного треугольника с максимальной площадью не существует.

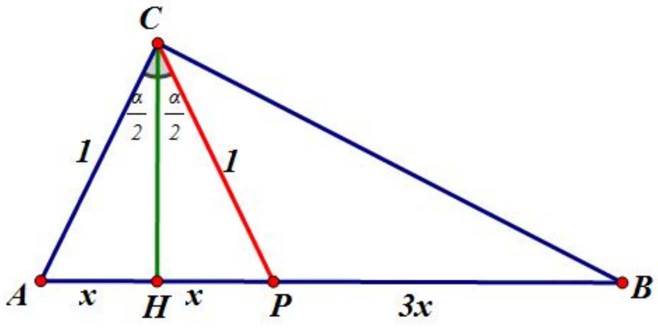
Решение. Заметим, что

$$S_{ABC} = \frac{5}{2} S_{ACP}.$$



Таким образом, площадь треугольника ABC максимальна тогда, и только тогда, когда максимальна площадь треугольника ACP, которая равна $\sin\alpha$, где $\alpha = \angle ACP$. От 0° до 90° непрерывно возрастает, достигая своего максимума, затем, начинает убывать.

Заметим, что максимальная площадь треугольника $ACP = 1$, а треугольника $ABC = \dfrac{5}{2}$, которая достигается при $\alpha = 90^\circ$. При этом $AP = \sqrt{2}$, и $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



Проведём высоту CH в равнобедренном треугольнике ACP. Тогда $\angle ACH = \angle PCH = 45^\circ$, $AH = PH = x$. Значит, $BH = 4x = 2\sqrt{2}$, $CH = \sqrt{1 - x^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда

$$\operatorname{tg}\angle BCH = \frac{BH}{CH} = \frac{4x}{x} = 4 \Rightarrow \angle BCH = \operatorname{arctg} 4.$$

Следовательно,

$$\angle ACB = \angle ACH + \angle BCH = 45^\circ + \operatorname{arctg} 4.$$

Но,

$$\angle ACB = \angle ACP + \angle BCP = \alpha + \angle BCP = 90^\circ + \angle BCP > 90^\circ.$$

Значит, при максимальной площади треугольник ABC тупоугольных. А среди остроугольных (в силу непрререрывного возрастания площади) треугольника с максимальной площадью нет.

Примерная схема оценивания

1. Показано, что площадь треугольника ABC максимальна тогда, и только тогда, когда максимальна площадь треугольника ACP – **2 балла**

2. Указано, что максимальная площадь треугольника ACP достигается при $\alpha = 90^\circ$ – **2 балла**

3а. Показано (с обоснованием), что среди остроугольных треугольников нет треугольника с максимальной площадью – **3 балла**

3б. Показано, что при максимальной (среди всех треугольников) площади с угол ACB тупой, но не объяснено, почему нет среди остроугольных треугольников треугольника с максимальной площадью – **1 балл**

3в Вычислена величина угла ACB максимальной среди всех треугольников площади, но не указано, что он тупой и/мли не объяснено, почему нет среди остроугольных треугольников треугольника с максимальной площадью – **2 балла**

Пункты 3а, 3б и 3в **НЕ суммируются**.

Примечание. В задаче изначально не предполагалось требования, чтобы треугольник был остроугольгым, но при наборе была допущена **опечатка**.

2. Компьютер заражён вирусами. На этот компьютер установили Антивирус. Этот Антивирус борется с каждым вирусом по следующей схеме:

1) сначала он **находит** вирус,

2) затем **помещает** найденный вирус в **карантин**,

3) и, в конце концов, **уничтожает** вирус.

Над каждым вирусом Антивирус выполняет операции **1-3** строго в указанном порядке, но не обязательно сразу одну за другой. Выполнив одну операцию над каким-то вирусом, он может либо приступить к следующей для этого вируса операции, либо перейти к другому вирусу, выполняя над ним соответствующую операцию.

Известно, что Антивирус вылечил компьютер, уничтожив все 2020 вирусов, которыми был заражён компьютер. Сколькими различными способами Антивирус мог это сделать?

Ответ: $\dfrac{6060!}{(3!)^{2020}}$.

Решение. Пронумеруем все вирусы числами от 1 до 2020. Выполнение операций Антивирусом по уничтожению вирусов закодируем в виде последовательности чисел 1 до 2020, записывая номер вируса каждый раз, как только Антивирус приступил к выполнению операции к какому-либо вирусу. Таким образом получится последовательность, состоящая из $2020 = 6060$ чисел (так как вирусов 2020, и над каждым вирусом выполняется по 3 операции). В этой последовательности в каком-то порядке будут записаны ровно три 1, ровно три 2, ровно три $3,\ldots$, ровно три 2020.

Обратно, если мы выберем произвольную последовательность, состоящую из 6060 чисел, в которой присутствуют ровно три 1, ровно три 2, ровно три $3,\ldots$, ровно три 2020, то мы можем восстановить последовательность выполнения Антивирусом операций над вирусами так: как только первый раз встретилось число x в последовательности, это означает, что нужно выполнить операцию **1** над вирусом x, второе появление числа x в этой последовательности означает, что пора выполнять операцию **2** над вирусом x, и, наконец, третье появление x в последовательности на говорит о том, что необходимо приступить к выполнению операции **3** над вирусом x. Например, последовательность

$$2018, 4, 4, 7, 3, 2018, 3, 2018, 4, \ldots$$

показывает нам, что Антивирус сначала находит вирус с номером 2018, затем находит вирус 4, после этого помещает вирус 4 в карантин, затем находит вирус 7, после чего находит вирус 3, затем помещает вирус 2018 в карантин, после этого помещает вирус 3 в карантин, теперь уничтожает вирус 2018, после чего уничтожает вирус 4, ...

Таким образом, количество таких последовательностей равно количеству различных способов, которыми Антивирус может уничтожить вирусы на компьютере. Поскольку рассматриваемая нами последовательность состоит из 6060 чисел от 1 до 2020, и каждое число входит в эту последовательность ровно три раза, то количество различных способов составить эту последовательность равно $\dfrac{6060!}{(3!)^{2020}}$.

Примерная схема оценивания

1. Показано, что количество способов равно количеству перестановок трёх 1, трёх 2, …, трёх 2020 (или эквивалентной последовательности) – **3 балла**.

2. Правильно посчитано количество вариантов – **4 балла**.

Ответ без обоснования – **0 баллов**

3. Найдите все решения арифметического ребуса

$$New = (((Y! - E)! + A)! - R)!$$

Здесь New – натуральное число, в десятичной записи которого на конце стоят ровно четыре нуля; Y, E, A, R – различные положительные цифры.

(Для любого натурального числа n величина $n!$ (факториал натурального числа n) определяется как произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно: $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$.)

Ответ: $Y = 3, E = 4, A = 2, R = 1$ или $Y = 2, E = 1, A = 3, R = 4$.

Решение. Число $New = K!$ ($K = (Y! - E)! + A)! - R$) имеет 4 нуля на конце. Это означает, что в каноническом разложении этого числа на простые множители число 5 входит с показателем степени 4. Это означает, что $K \in \{20, 21, 22, 23, 24\}$.

Пусть $K = 20 + M$ ($M \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$). Тогда

$$((Y! - E)! + A)! - R = K \iff ((Y! - E)! + A)! = K + R = 20 + M + R.$$

В левой части последнего уравнения находится факториал натурального числа, а справа $20 + M + R$. Так как M и R ненулевые цифры, то $22 \leq 20 + M + R \leq 38$. Поэтому $M + R = 4 \iff R = 4 - M$. Отсюда

$$((Y! - E)! + A)! = 4! \iff (Y! - E)! + A = 4 \iff (Y! - E)! = 4 - A.$$

Есть 2 случая для $4 - A$:

$$\text{или } 4 - A = 2 = 2! \text{ или } 4 - A = 1 = 1! = 0!.$$

Случай 1. $4 - A = 2 = 2! \iff A = 2$. Следовательно,

$$Y! - E = 2 \iff Y! = 2 + E \iff \left[\begin{array}{l} 2 + E = 2, Y = 2, \\ 2 + E = 6, Y = 3 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} E = 0, Y = 2, \\ E = 4, Y = 3. \end{array}\right.$$

Таким образом,

$$\left[\begin{array}{l} Y = 2, E = 0, A = 2, R = 4 - M, \\ Y = 3, E = 4, A = 2, R = 4 - M, \end{array}\right.$$

где $M \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Учитывая, что Y, E, A, R – различные положительные цифры, получаем

$$Y = 3, E = 4, A = 2, R = 1.$$

Случай 2. $4 - A = 1 = 1! = 0! \iff A = 3$.

$$\left[\begin{array}{l} Y! - E = 1, \\ Y! - E = 0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} Y! = 1 + E, \\ Y! = E \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{c} 1 + E = 2, Y = 2, \\ 1 + E = 6, Y = 3 \\ E = 2, Y = 2, \\ E = 6, Y = 3 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{c} E = 1, Y = 2, \\ E = 5, Y = 3 \\ E = 2, Y = 2, \\ E = 6, Y = 3 \end{array}\right.$$

Отсюда,

$$\left[\begin{array}{l} Y=2, E=1, A=3, R=4-M \\ Y=3, E=5, A=3, R=4-M \\ Y=2, E=2, A=3, R=4-M \\ Y=3, E=6, A=3, R=4-M, \end{array}\right.$$

где $M \in \{0,1,2,3,4\}$.

Так как Y, E, A, R - различные положительные цифры, то

$$Y=2, E=1, A=3, R=4.$$

Примерная схема оценивания

1. Показано, что $New = K!$, где $K \in \{20, 21, 22, 23, 24\}$ – **1 балл**

2. Показано, что $R = 4 - M = 24 - K$ – **1 балл**

3. Показано, что $A = 2$ или 3 – **1 балл**

4. Рассмотрен случай $A = 2$ и получен ответ $Y = 3, E = 4, A = 2, R = 1$. – **2 балла**

Ответ без обоснования – **0 баллов**

5. Рассмотрен случай $A = 3$ и получен ответ $Y = 2, E = 1, A = 3, R = 4$. – **2 балла**

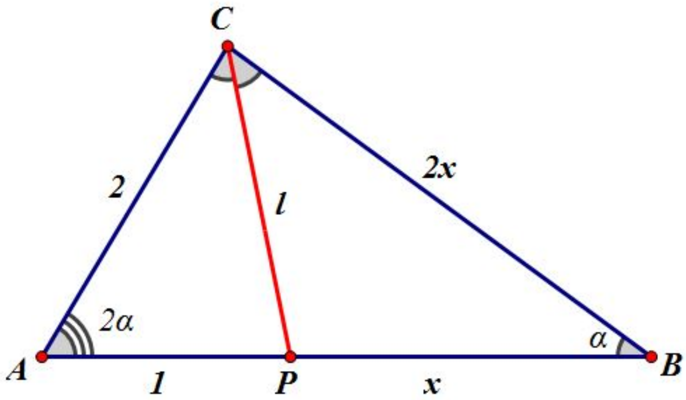
Ответ без обоснования – **0 баллов**

11 класс

1. В треугольнике ABC проведена биссектриса CP, причём $AC : AP = 2 : 1$. Известно, что $\angle CAB = 2\angle CBA$. Найдите величину наибольшего угла треугольника ABC.

Ответ: $\angle BAC = \arccos\dfrac{1}{8}$.

Решение. Так как $AC : AP = 2 : 1$, то без ограничения общности можно считать, что $AP = 1$, $AC = 2$.



Обозначим $BP = x$. Так как CP – биссектриса, то

$$\frac{AP}{AC} = \frac{BP}{BC} \iff \frac{1}{2} = \frac{x}{BC} \Rightarrow BC = 2x.$$

Пусть $\angle CBA = \alpha$, тогда $\angle CAB = 2\alpha$.

Найдём длину биссектрисы CP:

$$CP = \sqrt{AC \cdot BC - AP \cdot BP} = \sqrt{4x - x} = \sqrt{3x}.$$

По теореме синусов из треугольника ABC имеем

$$\frac{\sin\angle CBA}{AC} = \frac{\sin\angle CAB}{BC} \iff \frac{\sin\alpha}{2} = \frac{\sin 2\alpha}{2x} \iff$$
$$\iff \frac{\sin\alpha}{2} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2x} \iff \cos\alpha = \frac{x}{2}.$$

По теореме косинусов из треугольника BCP

$$\cos\alpha = \frac{BP^2 + BC^2 - CP^2}{2BP \cdot BC} = \frac{x^2 + 4x^2 - 3x}{4x^2} = \frac{5x^2 - 3x}{4x^2} = \frac{5x - 3}{4x}.$$

Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{x}{2} = \frac{5x - 3}{4x} \iff 2x^2 - 5x + 3 = 0 \iff x = 1 \text{ или } x = \frac{3}{2}.$$

Заметим, что из треугольника ACP по теореме косинусов

$$\cos 2\alpha = \frac{AC^2 + AP^2 - CP^2}{2AC \cdot AP} = \frac{4 + 1 - 3x}{4} = \frac{5 - 3x}{4}.$$

Случай 1. Если $x = 1$, то $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, тогда с одной стороны

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

С другой стороны,

$$\cos 2\alpha = \frac{5-3x}{4} = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}.$$

Противоречие. Значит, $x = 1$ не подходит.

Случай 2. Если $x = \dfrac{3}{2}$, то $\cos\alpha = \dfrac{3}{4}$, тогда с одной стороны

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot \frac{9}{16} - 1 = \frac{1}{8}.$$

С другой стороны,

$$\cos 2\alpha = \frac{5-3x}{4} = \frac{5-3\cdot\frac{3}{2}}{4} = \frac{1}{8}.$$

Значит, $x = \dfrac{3}{2}$, тогда $AC = 2$, $AB = 1 + x = \dfrac{5}{2}$, $BC = 2x = 3$. Следовательно, BC – наибольшая сторона в этом треугольнике, а наибольший угол в этом треугольнике – угол CAB. $\cos\angle BAC = \cos 2\alpha = \dfrac{1}{8}$.

Таким образом, $\angle BAC = \arccos\dfrac{1}{8}$.

Примерная схема оценивания

1. Показано, что $BC = 2BP$ – **1 балл**
2. Показано, что $\cos\alpha = \dfrac{x}{2}$ – **1 балл**
3. Показано, что $\cos\alpha = \dfrac{5x-3}{4x}$ (или другое верное равенство) – **1 балл**
4. Найдены корни уравнения – **1 балл**
5. Показано, что подходит только $x = \dfrac{3}{2}$ – **1 балл**
6. Найден косинус большего угла – **1 балл**
7. Получен правильный ответ – **1 балл**
7'. Ответ без обоснования – **0 баллов**

2. Компьютер заражён вирусами. На этот компьютер установили Антивирус. Этот Антивирус борется с каждым вирусом по следующей схеме:

1) сначала он **находит** вирус,

2) затем **помещает** найденный вирус в **карантин**,

3) и, в конце концов, **уничтожает** вирус.

Над каждым вирусом Антивирус выполняет операции **1-3** строго в указанном порядке, но не обязательно сразу одну за другой. Выполнив одну операцию над каким-то вирусом, он может либо приступить к следующей для этого вируса операции, либо перейти к другому вирусу, выполняя над ним соответствующую операцию.

Известно, что Антивирус вылечил компьютер, уничтожив все 2020 вирусов, которыми был заражён компьютер. Сколькими различными способами Антивирус мог это сделать?

Ответ: $\dfrac{6060!}{(3!)^{2020}}$.

Решение. Пронумеруем все вирусы числами от 1 до 2020. Выполнение операций Антивирусом по уничтожению вирусов закодируем в виде последовательности чисел 1 до 2020, записывая номер вируса каждый раз, как только Антивирус приступил к выполнению операции к какому-либо вирусу. Таким образом получится последовательность, состоящая из $2020 = 6060$ чисел (так как вирусов 2020, и над каждым вирусом выполняется по 3 операции). В этой последовательности в каком-то порядке будут записаны ровно три 1, ровно три 2, ровно три 3,$\ldots$, ровно три 2020.

Обратно, если мы выберем произвольную последовательность, состоящую из 6060 чисел, в которой присутствуют ровно три 1, ровно три 2, ровно три 3,$\ldots$, ровно три 2020, то мы можем восстановить последовательность выполнения Антивирусом операций над вирусами так: как только первый раз встретилось число x в последовательности, это означает, что нужно выполнить операцию **1** над вирусом x, второе появление числа x в этой последовательности означает, что пора выполнять операцию **2** над вирусом x, и, наконец, третье появление x в последовательности на говорит о том, что необходимо приступить к выполнению операции **3** над вирусом x. Например, последовательность

$$2018, 4, 4, 7, 3, 2018, 3, 2018, 4, \ldots$$

показывает нам, что Антивирус сначала находит вирус с номером 2018, затем находит вирус 4, после этого помещает вирус 4 в карантин, затем находит вирус 7, после чего находит вирус 3, затем помещает вирус 2018 в карантин, после этого помещает вирус 3 в карантин, теперь уничтожает вирус 2018, после чего уничтожает вирус 4, ...

Таким образом, количество таких последовательностей равно количеству различных способов, которыми Антивирус может уничтожить вирусы на компьютере. Поскольку рассматриваемая нами последовательность состоит из 6060 чисел от 1 до 2020, и каждое число входит в эту последовательность ровно три раза, то количество различных способов составить эту последовательность равно $\frac{6060!}{(3!)^{2020}}$.

Примерная схема оценивания

1. Показано, что количество способов равно количеству перестановок трёх 1, трёх 2, ..., трёх 2020 (или эквивалентной последовательности) – **3 балла**.

2. Правильно посчитано количество вариантов – **4 балла**.

Ответ без обоснования – **0 баллов**

3. Найдите все тройки (x, y, z) натуральных чисел, для которых найдётся такое натуральное число n, что

$$x! + y! + z! = 2^n.$$

Ответ: $(1,1,2), (1,1,3), (2,3,4), (2,3,5)$, а также их перестановки.

Решение. Не умаляя общности, будем считать, что $x \le y \le z$.

Заметим, что $2^n = x! + y! + z! \ge 1 + 1 + 1 = 3$. Следовательно, $n \ge 2$.

Если $x \ge 3$, тогда $z \ge y \ge x \ge 3$, и $x! + y! + z! \vdots 3$, но $2^n \not\vdots 3$ ни при каком натуральном n.

Поэтому $x = 1$ или $x = 2$.

Случай 1. Если $x = 1$, то получим

$$1 + y! + z! = 2^n.$$

Если $y \ge 2$, то $z \ge 2$. Тогда левая часть последнего уравнения будет нечётна, а правая – чётна. Поэтому равенство невозможно. Значит, $y = 1$, и уравнение примет вид

$$1 + 1 + z! = 2^n \iff 2 + z! = 2^n \iff z! = 2(2^{n-1} - 1).$$

Так как $n \ge 2$, то $z! = 2(2^{n-1} - 1) \not\vdots 4$, следовательно, $z \le 3$, то есть $z \in \{1, 2, 3\}$.

a) Пусть $z = 1$, тогда получим

$$1! + 1! + 1! = 2^n \iff 2^n = 3,$$

но последнее уранение не имеет решений в натуральных числах.

b) Пусть $z = 2$, тогда получим

$$1! + 1! + 2! = 2^n \iff 2^n = 4 = 2^2,$$

откуда $n = 2$. Таким образом, тройка чисел $(1,1,2)$ вместе с любой её перстановкой удовлетворяет условию задачи.

c) Если $z - 3$, то

$$1! + 1! + 3! = 2^n \iff 2^n = 8 = 2^3,$$

отсюда $n = 3$, то есть тройка $(1,1,3)$ и её всевозможные перестановки удовлетворяют условию задачи.

Случай 2. При $x = 2$ исходное уравнение перепишется в виде

$$2 + y! + z! = 2^n.$$

Учитывая, что $z \ge y \ge x = 2$, получаем, что $2^n \ge 6$, отсюда $n \ge 3$. То есть правая часть уравнения делится на 8.

Если $y \ge 3$, то $z \ge 3$, и, следовательно, $y! \vdots 8$, $z! \vdots 8$. Отсюда получаем, что левая часть уравнения не делится на 8, что противоречит упомянотому ранее факту, что правая часть уравнения кратна 8.

Значит, $y = 2$ или $y = 3$.

a) Если $y = 2$, то исходное уравнение примет вид

$$4 + z! = 2^n.$$

В этом случае z не может быть больше 3, иначе левая часть уравнения не будет кратна 8, в то время, как правая делится на 8.

(i) При $z = 2$ мы получаем

$$x! + y! + z! = 2 + 2 + 2 = 6 = 2^n,$$

но 6 не является степенью 2, и уравнение $2^n = 6$ неразрешимо в натуральных числах.

(ii) Если $z = 3$, то

$$x! + y! + z! = 2 + 2 + 6 = 10,$$

однако, нет такого натурального числа n, что $2^n = 10$.

b) Если $y = 3$, то получаем

$$8 + z! = 2^n.$$

Из последнего равенства следует, что

$$2^n = 8 + z! \geq 8 + 3! = 14.$$

Отсюда получаем, что $n \geq 4$, и $2^n \vdots 16$.

Если $z \geq 6$, то $z! \vdots 16$, что приводит к тому, что $8 + z! \not\vdots 16$, и равенство $8 + z! = 2^n$ невозможно.

Значит, $z \in \{3, 4, 5\}$.

(i) При $z = 3$ получаем

$$14 = 2^n,$$

что невозможно ни при каком натуральном n.

(ii) При $z = 4$ имеем

$$32 = 2^n \iff n = 5.$$

Значит, тройка чисел (2,3,4) вместе со своими перестановками удовлетворяет условию задачи.

(iii) При $z = 5$ получаем

$$128 = 2^n \iff n = 7.$$

Таким образом, тройка чисел (2,3,5) вместе с её перестановками удовлетворяет условию задачи.

Итак, решением задачи являются тройки чисел $(1, 1, 2)$, $(1, 1, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$, а также их всевозможные перестановки.

Примерная схема оценивания

1. Показано, что случай $x \geq 3$ невозможен – **2 балла**.
2. Полностью рассмотрен случай 1, получен правильный ответ – **2 балла**.
2. Полностью рассмотрен случай 2, получен правильный ответ – **3 балла**.
Ответ без обоснования – **0 баллов**