

Математика пәні бойынша
Республикалық оқушылар олимпиадасының
үшінші (облыстық) кезеңі (2022-2023 оқу жылы)

9-сынып

2 тур

Жұмыс уақыты: 3 сағат 30 минут.

Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

4. $PL \parallel BC$, $PM \parallel CA$, $PK \parallel AB$ болатындай ABC үшбұрышының BC , CA , AB қабырғаларынан сәйкесінше K , L , M нүктелері таңдалды, ал үшбұрыштың ішінен P нүктесі таңдалды. $AMPL$, $BKPM$, $CLPK$ - үш трапециясы да шеңберге сырттай сызылуы мүмкін бе?

5. $2 \leq \frac{x}{x_i} \leq 18$ ($x = a, b, c$). орындалатындай оң a, b, c, a_1, b_1, c_1 үшін теңсіздікті дәлелдеңіз.

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) \leq \frac{25}{9}(a \cdot a_1 + b \cdot b_1 + c \cdot c_1)^2$$

6.

$$[a, b, c] = \frac{ab + bc + ca}{5}.$$

болатындай барлық натурал a, b, c табыңыз.

Бұл жердегі $[x, y]$ – x және y сандарының ең кіші ортақ еселігі.

Третий (областной) этап
Республиканской олимпиады школьников
по математике (2022-2023 учебный год)

9 класс

2 тур

Время работы: 3 часа 30 минут.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

4. На сторонах BC , CA , AB треугольника ABC выбраны соответственно точки K , L , M , а внутри треугольника выбрана точка P так, что $PL \parallel BC$, $PM \parallel CA$, $PK \parallel AB$. Может ли оказаться, что все три трапеции $AMPL$, $BKPM$, $CLPK$ – описанные?

5. Для положительных a, b, c, a_1, b_1, c_1 таких $2 \leq \frac{x}{x_i} \leq 18$ ($x = a, b, c$). Докажите, что

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) \leq \frac{25}{9}(a \cdot a_1 + b \cdot b_1 + c \cdot c_1)^2$$

6. Найти все натуральные a, b, c такие, что

$$[a, b, c] = \frac{ab + bc + ca}{5}.$$

Здесь $[x, y]$ – наименьшее общее кратное чисел x и y .