

Математика пәні бойынша
Республикалық оқушылар олимпиадасының
үшінші (облыстық) кезеңі (2022-2023 оқу жылы)

10-сынып

2 тур

Жұмыс уақыты: 3 сағат 30 минут.

Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

4. Әр натурал n -таңбалы k саны үшін $D(k)$ – ондық жазбадағы k санының цифрларының көбейтіндісі болсын. Барлық натурал n -таңбалы сандары үшін $D(k)$ сандарының қосындысы неге тең?
5. Карталарда $0, 1, 2, \dots, p - 1$ сандары жазылған, бұл жерде p – жай сан. Бірнеше картадағы сандардың қосындысы p -ға бөлінетіндей қанша тәсілмен сол карталарды таңдай аламыз?
6. G графының төбелері 1-ден $(p - 1)$ -ге дейінгі сандармен нөмерленіп шықты, бұл жердегі $p > 3$ жай сан. Кез келген x және y төбелері үшін, $x^n + y^n$ саны p -ға бөлінетіндей n саны табылса, онда сол төбелерді қабырғамен байланыстырамыз. G графында барлық төбелерін тек бір рет қана өтетін цикл (тұйық жол) бар екенін дәлелдеңіз.

Третий (областной) этап
Республиканской олимпиады школьников
по математике (2022-2023 учебный год)

10 класс

2 тур

Время работы: 3 часа 30 минут.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

4. Для каждого n -значного натурального числа k определим $D(k)$ – как произведение цифр в десятичной записи числа k . Чему равна сумма всех таких $D(k)$ по всем n -значным натуральным числам?
5. На карточках написаны $0, 1, 2, \dots, p - 1$, где p – простое. Сколькими способами можно выбрать несколько карточек так чтобы сумма чисел на карточках делилась на p ?
6. В графе G вершины пронумерованы числами от 1 до $(p - 1)$, где $p > 3$ простое. Между любыми двумя вершинами x и y ставится ребро, если существует натуральное n , для которого $x^n + y^n$ делится на p . Докажите, что в G существует цикл (замкнутый путь), который проходит через каждую вершину данного графа ровно по одному разу.

Общие положения по проверке работ

1. Приведённые критерии оценивания являются приблизительными. Учащиеся (как и проверяющие), возможно, смогут найти и другие верные решения. Жюри имеет право вносить изменения в критерии, проголосовав за них коллегиально. Главное, чтобы все работы участников оценивались по одинаковым критериям.
2. Перед проверкой жюри следует внимательно изучить олимпиадные задания, их решения и критерии. Желательно прорешать задания самим для возможного поиска альтернативных решений.
3. По окончании проверки обязательно надо проводить разбор и апелляцию задач, притом разборы желательно делать до апелляции и при разборе рассказывать ученикам, за что снимались баллы, а за что добавлялись. Это значительно сократит число учеников желающих подать на апелляцию.
4. В целях более справедливой оценки желательно чтобы одну задачу проверял один человек (или, согласованно, одна группа). В конце, если позволяет время, то следует перепроверить горизонтально (один человек проверяет все задачи одного школьника).
5. Следует помнить, что олимпиадная работа – это не контрольная работа. При оценивании олимпиадных работ, в отличие от оценивания типовых заданий по математике, недопустимо снимать баллы за исправления в работе, за слишком длинное решение, или если решение школьника отличается от решения, приведенного в учебных пособиях.
6. Не следует слишком строго наказывать за технические ошибки или недостатки в решении: описки, легко устранимые арифметические ошибки, непринципиальные моменты в ходе решения, например участник до конца не упростил ответ, не совсем строгий порядок изложение или пропуск очевидных моментов, не влияющих в целом на ход решения. В зависимости от серьёзности ошибки или недостатка снимается не более 2 баллов, в некоторых ситуациях вообще снимать не следует.

Решения и критерии оценивания второго (районного) этапа Республиканской олимпиады школьников по математике 2022-2023 учебный год

10 класс

7. Внимательно проверяйте насколько соответствует решение критериям проверки. В особенности, если решение ученика неполное и / или альтернативное официальному. Важно понять, насколько участник продвинулся по критериям, какие случаи идеи он предлагает и какие факты им получены или доказаны. В альтернативного решения желательно обсудить решения и критерии для этого решения коллегиально.
8. Однако текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен оцениваться в 0 баллов. Баллы за «старание участника» не выставляются, даже если участник исписал много страниц или построил «красивый» чертёж. Если участник «угадал» правильный ответ, не приводит никаких объяснений, как он его получил, то за это не следует давать баллов.
9. Часто на олимпиадах можно встретить так называемые «счётные решения», когда участник пытается решить задачу «в лоб», опираясь только на алгебраические операции, метод координат, векторный метод, теоремы косинусов, синусов, Чевы, Менелая и т. п., не применяя никакую идею, отличного от технического счёта. Обычно такие решения (если вообще возможно решить таким способом задачу) занимают много страниц текста. К таким «счётным» решениям по сложившейся многолетней традиции применяется следующая схема оценивания:
- если участник смог довести своё счётное решение до конца, то он получает полные **7 баллов**;
 - если участник не довёл своё «счётное» решение до конца (независимо насколько он продвинулся) и / или допустил вычислительную ошибку — **0 баллов**.
10. На математических олимпиадах преимущественно закрепились наилучшим образом зарекомендовавшая себя 7-балльная шкала. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Основные принципы оценивания приведены в таблице ниже. Таблица примерная, к каждой задаче следует подходить индивидуально.

Примерные критерии оценивания задач

Баллы	Отметка	Правильность (ошибочность) решения
7	+	Полное верное решение.
6-7	$\dot{+}$	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	$\dot{+}$ или $\dot{-}$	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	\pm	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	\mp	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	$\dot{-}$	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	—	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	—	Решение отсутствует.

Задача 10.4

Для каждого n -значного натурального числа k определим $D(k)$ — как произведение цифр в десятичной записи числа k . Чему равна сумма всех таких $D(k)$ по всем n -значным натуральным числам?

A_n — n -таңбалы сандардағы бізге керек қосынды деп аламыз. $D_n(k)$ — n -таңбалы k санының цифрларының көбейтіндісі болсын. k санының оң жағына 0 цифрасын жазып, оны $k0$ деп атайық. Дәл солай $k1, k2, \dots, k9$ анықтаймыз. $D_{n+1}(ki) = i \cdot D_n(k)$ (бұл жерде $i = 0, 1, 2, \dots, 9$) екенін байқайық. Демек, $D_{n+1}(k0) + D_{n+1}(k1) + \dots + D_{n+1}(k9) = 45 \cdot D_n(k)$. Демек, $A_{n+1} = 45 \cdot A_n$. Бұдан $A_n = 45^{n-1} \cdot A_1 = 45^n$ екенін байқау қиын емес.

Обозначим нужную нам сумму для n -значных чисел как A_n . Пусть $D_n(k)$ — произведение цифр n -значного числа k . Припишем справа к числу k цифру 0 и назовем его $k0$. Аналогично определим $k1, k2, \dots, k9$. Заметим, что $D_{n+1}(ki) = i \cdot D_n(k)$ (где $i = 0, 1, \dots, 9$). Тогда $D_{n+1}(k0) + D_{n+1}(k1) + \dots + D_{n+1}(k9) = 45 \cdot D_n(k)$. Следовательно $A_{n+1} = 45 \cdot A_n$. Откуда легко увидеть, что $A_n = 45^{n-1} \cdot A_1 = 45^n$.

Задача 10.5

На карточках написаны $0, 1, 2, \dots, p-1$, где p — простое. Сколькими способами можно выбрать несколько карточек так чтобы сумма чисел на карточках делилась на p ?

Если $p = 2$ болса, онда жауап 1. Енді $p > 2$ болсын. Барлық карточкадағы сандардың қосындысы $0 + 1 + \dots + p - 1$ p -ға бөлінетінін байқайық. k саннан тұратын жиын қарастырайық ($k < p$ және қосындысы p -ға бөлінуі міндетті емес). Енді, әр санға 1-ді қосып p модулі бойынша қарастырайық. Жаңа жиын алдық. Солай тағы да $p - 2$ рет жасап барлығы p жиын аламыз. Бастапқы жиындағы сандардың қосындысы s болсын, онда қалған жиындағы сандардың қосындысы p модулі бойынша $s + k, s + 2k, \dots, s + (p - 1)k$ тең болады. $k < p$ болғандықтан, барлық қарастырылған қосындылар p модулі бойынша барлық қалдықтарды беріп шығады. Демек, p жиынның сандарының қосындысы p модулі бойынша барлық қалдықтар беретіндей, біз барлық k саннан тұратын жиындарды p -ға бөліп шығуға болады. Демек, барлығы $\frac{\binom{p}{k}}{p}$ k саннан тұратын жиынның сандарының қосындысы p -ға бөлінеді. Онда жауабы:

$$\frac{\binom{p}{1}}{p} + \frac{\binom{p}{2}}{p} + \dots + \frac{\binom{p}{p-1}}{p} + 1 = \frac{\binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \dots + \binom{p}{p-1}}{p} + 1 = \frac{2^p - 2}{p} + 1.$$

В случае $p = 2$, ответ 1. Пусть теперь $p > 2$. Заметим, что тогда сумма чисел на всех карточках $0 + 1 + \dots + p - 1$ делится на p . Рассмотрим набор из k чисел ($k < p$ и необязательно чтобы сумма чисел делилось на p). Теперь, прибавим 1 к каждому числу и рассмотрим по модулю p . Получили новый набор. И так делаем еще $p - 2$ раза и мы получаем p наборов. Пусть сумма чисел начального набора s , то сумма чисел остальных наборов по модулю p будет $s + k, s + 2k, \dots, s + (p - 1)k$. Так как $k < p$, то эти суммы дают полную систему вычетов по модулю p . Таким образом мы можем все наборы из k чисел разделить по p , чтобы все p набора давали полную систему вычетов по модулю p . Значит, всего

$\frac{\binom{p}{k}}{p}$ наборов из k чисел делятся на p . Тогда всего:

$$\frac{\binom{p}{1}}{p} + \frac{\binom{p}{2}}{p} + \dots + \frac{\binom{p}{p-1}}{p} + 1 = \frac{\binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \dots + \binom{p}{p-1}}{p} + 1 = \frac{2^p - 2}{p} + 1.$$

Задача 10.6

В графе G вершины пронумерованы числами от 1 до $(p - 1)$, где $p > 3$ простое. Между любыми двумя вершинами x и y ставится ребро, если существует натуральное n , для которого $x^n + y^n$ делится на p . Докажите, что в G существует цикл (замкнутый путь), который проходит через каждую вершину данного графа ровно по одному разу.

r қалдығы p модулі бойынша квадраттық (квадраттық емес) қалдық деп аталады, егер $x^2 \equiv r \pmod{p}$ салыстыру дұрыс болатын бүтін x табылса (табылмаса). 1-ден $p - 1$ -ге дейінгі сандар арасында дәл $\frac{p-1}{2}$ квадраттық қалдық және дәл $\frac{p-1}{2}$ квадраттық емес қалдық бар екенін байқайық. $n = \frac{p-1}{2}$ болғанда әрбір квадраттық қалдық әрбір квадраттық емес қалдықпен қабырғамен қосылғанын түсіну оңай. Оларды кезекпен қойып біз қажетті циклды аламыз.

Остаток r называется квадратичным (некватратичным) вычетом по модулю p , если существует (не существует) такое целое x , для которого верно сравнение $x^2 \equiv r \pmod{p}$. Заметим, что среди чисел от 1 до $p - 1$ ровно $\frac{p-1}{2}$ квадратичных вычетов и ровно $\frac{p-1}{2}$ некватратичных вычетов. При $n = \frac{p-1}{2}$ не сложно понять, что каждый квадратичный вычет связан ребром с каждым некватратичным вычетом. Выстроив их по очереди получим требуемый цикл.