Математика пәні бойынша Республикалық оқушылар олимпиадасының қорытынды кезеңі (2021-2022 оқу жылы)

10-сынып, 1 тур

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут.
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

1. ABC сүйірбұрышты үшбұрышында AD, BE және CF биіктіктері жүргізілді. $PQ||BC$ болатындай AB және AC кесінділерінен сәйкесінше P және Q нүктелері алынған. Диаметрлері BQ және CP болатын шеңберлер R және T нүктелерінде қиылысады (A нүктесіне T нүктесінен қарағанда R нүктесі жақын). CM және BN — BCR үшбұрышының биіктіктері болсын. FM, NE және AD түзулері бір нүктеде қиылысатынын дәлелдеңіз.

2. A натурал саны үшін $Z(A)$ деп A санын кері ретпен жазылған сан ретінде анықтаймыз (мысалы, $Z(521) = 125$). A саны ***«жақсы»*** деп аталады, егер оның ондық жүйесіндегі жазбасында нөлдер болмаса, бірінші цифры соңғысына тең болмаса және $(Z(A))^2 = Z(A^2)$. 10^6 үлкен барлық «жақсы» сандарды табыңыз.

3. $m \in \mathbb{N}$ болсын. Кез келген $x, y \in \mathbb{R}^+$ үшін келесі шарт орындалатындай барлық $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ функцияларын табыңыз

$$f(f(x)+y) - f(x) = \left(\frac{f(y)}{y} - 1\right) \cdot x + f^{(m)}(y).$$

Бұл жердегі $f^{(m)}(y) = \underbrace{f(f(\ldots f(y)\ldots)}_{m \text{ раз}}$.

Заключительный этап Республиканской олимпиады школьников по математике (2021-2022 учебный год)

10 класс, 1 тур

Время работы: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

1. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AD, BE и CF. P и Q лежат на отрезках AB и AC соответственно так, что прямая PQ параллельна BC. Окружности построенные на BQ и CP, как на диаметрах, пересекаются в точках R и T (R является ближе к A чем T). Пусть CM и BN – высоты в треугольнике BCR. Докажите, что прямые FM, NE и AD пересекаются в одной точке.

2. Для натурального числа A, определим $Z(A)$ как число A, записанное в обратном порядке (например, $Z(521) = 125$). Число A называется ***«хорошим»***, если в его десятичной записи нет нулей, первая цифра не равна последней, и $(Z(A))^2 = Z(A^2)$. Найдите все «хорошие» числа бо́льшие 10^6.

3. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Найдите все такие функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^+$ выполнено

$$f(f(x)+y) - f(x) = \left(\frac{f(y)}{y} - 1\right) \cdot x + f^{(m)}(y).$$

Здесь $f^{(m)}(y) = \underbrace{f(f(\ldots f(y)\ldots)}_{m \text{ раз}}$.

Решения и схемы оценивания заключительного этапа Республиканской олимпиады школьников по математике

2021-2022 учебный год

10 класс

День 1

Общие положения по проверке работ

1. Приведённые критерии оценивания являются приблизительными. Учащиеся (как и проверяющие), возможно, смогут найти и другие верные решения. Жюри имеет право вносить изменения в критерии, проголосовав за них коллегиально. Главное, чтобы все работы участников оценивались по одинаковым критериям.

2. Перед проверкой жюри следует внимательно изучить олимпиадные задания, их решения и критерии. Желательно прорешать задания самим для возможного поиска альтернативных решений.

3. По окончании проверки обязательно надо проводить разбор и апелляцию задач, притом разборы желательно делать до апелляции и при разборе рассказывать ученикам, за что снимались баллы, а за что добавлялись. Это значительно сократить число учеников желающих подать на апелляцию.

4. В целях более справедливой оценки желательно чтобы одну задачу проверял один человек (или, согласованно, одна группа). В конце, если позволяет время, то следует перепроверить горизонтально (один человек проверяет все задачи одного школьника).

5. Следует помнить, что олимпиадная работа – это не контрольная работа. При оценивании олимпиадных работ, в отличие от оценивания типовых заданий по математике, недопустимо снимать баллы за исправления в работе, за

слишком длинное решение, или если решение школьника отличается от решения, приведенного в учебных пособиях.

6. Не следует слишком строго наказывать за технические ошибки или недостатки в решении: описки, легко устранимые арифметические ошибки, непринципиальные моменты в ходе решения, напримеручастник до конца не упростил ответ, не совсем строгий порядок изложение или пропуск очевидных моментов, не влияющих в целом на ход решения. В зависимости от серьёзности ошибки или недостатка снимается не более 2 баллов, в некоторых ситуациях вообще снимать не следует.

7. Внимательно проверяйте насколько соответствует решение критериям проверки. В особенности, если решение ученика неполное и / или альтернативное официальному. Важно понять, насколько участник продвинулся по критериям, какие случае идеи он предлагает и какие факты им получены или доказаны. В альтернативного решения желательно обсудить решения и критерии для этого решения коллегиально.

8. Однако текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен оцениваться в 0 баллов. Баллы за «старание участника» не выставляются, даже если участник исписал много страниц или построил «красивый» чертёж. Если участник «угадал» правильный ответ, не приводит никаких объяснений, как он его получил, то за это не следует давать баллов.

9. Часто на олимпиадах можно встретить так называемые «счётные решения», когда участник пытается решить задачу «в лоб», опираясь только на алгебраические операции, метод координат, векторный метод, теоремы косинусов, синусов, Чевы, Менелая и т. п., не применяя никакую идею, отличного от технического счёта. Обычно такие решения (если вообще возможно решить таким способом задачу) занимают много страниц текста. К таким «счётным» решениям по сложившейся многолетней традицииприменяется следующая схема оценивания:

   - если участник смог довести своё счётное решение до конца, то он получает полные **7 баллов**;
   - если участник не довёл своё «счётное» решение до конца (независимо насколько он продвинулся) и / или допустил вычислительную ошибку — **0 баллов**.

10. На математических олимпиадах преимущественно закрепилась наилучшим образом зарекомендовавшая себя 7-балльная шкала. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Основные принципы оценивания приведены в таблице ниже. Таблица примерная, к каждой задаче следует подходить индивидуально.

Примерные критерии оценивания задач

Баллы	**Отметка**	**Правильность (ошибочность) решения**
7	$+$	Полное верное решение.
6-7	$\underset{\cdot}{+}$	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	$\underset{\bullet}{+}$ или $\underset{-}{+}$	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	$\pm$	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	$\mp$	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	$\dot{-}$	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	$-$	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	$-$	Решение отсутствует.

Задача 10.1

В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AD, BE и CF. P и Q лежат на отрезках AB и AC соответственно так, что прямая PQ параллельна BC. Окружности построенные на BQ и CP, как на диаметрах, пересекаются в точках R и T (R является ближе к A чем T). Пусть CM и BN – высоты в треугольнике BCR. Докажите, что прямые FM, NE и AD пересекаются в одной точке.

Решение. Обозначим окружность диаметра BQ как ω_1, а окружность диаметра CP как ω_2. Докажем, что R лежит на AD. Так как прямая соединяющая центры ω_1 и ω_2 является средней линией трапеции $BPQC$, и как следствие $PQ \parallel BC$, то достаточно доказать, что A лежит на радикальной оси RT.

Пусть ω_1 пересекает AB в точке U, а ω_2 пересекает AC в точке V. Тогда $\angle PUQ = \angle PVQ = 90°$, следовательно, четырехугольник $PUVQ$ – вписанный. Значит $\angle AUV = \angle AQP = \angle ACB$. Отсюда, четырехугольник $UVBC$ вписанный, следовательно, $AU \cdot AB = AV \cdot AC$, значит, A лежит на радикальной оси ω_1 и ω_2.

Заметим, что B, F, M, E, Q, C лежат на одной окружности имеющий диаметр BC, скажем ω.

$\angle FAR = \angle BAD = \angle BCF = \angle BMF$, откуда следует, что четырехугольник $AFMR$ – вписанный. Аналогичным образом, четырехугольник $AENM$ также вписанный. Тогда из теоремы о радикальных центрах для ω и описанных окружностей четырехугольников $AFMR$ и $AENM$, получаем, что

FM, NE и AD пересекаются в одной точке.

Схема оценивания

1. Доказано, что точки B, F, M, E, Q, C лежат на одной окружности **(0 баллов)**.

2. Доказано, что $R \in AD$ **(2 балла)**.

3. Доказано, что четырехугольник $AFMR$ (или $AENM$) вписанный **(1 балл)**.

4. Задача сведена к тому, что $R \in AD$ **(3 балла)**.

5. Полное решение **(7 баллов)**.

Примечание. Суммируются только пункты 2, 3 и 4.

Задача 10.2

Для натурального числа A, определим $Z(A)$ как число A, записанное в обратном порядке (например, $Z(521) = 125$). Число A называется ***«хорошим»***, если в его десятичной записи нет нулей, первая цифра не равна последней, и $(Z(A))^2 = Z(A^2)$. Найдите все «хорошие» числа бо́льшие 10^6.

Ответ: 1111112, 2111111.

Решение.

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
 & & & & \times & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\
 & & & & & b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\
\hline
 & & & c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} & c_{1n+1} & \\
 & c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} & \ldots & c_{2n+1} & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & & \\
c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} & & & & & \\
\hline
\end{array}$$

Заметим, что если $k \leqslant n+1$ то в $k-$том столбце максимум $k-1$ переходов, в столбце $n+2$ максимум n переходов. В столбце $n+3$ максимум $n-1$ переходов и.т.д.В столбце $2n+1$ максимум 1 переход. Если есть столбец $2n+2$, то в нём нет переходов.

Пусть

$$\begin{cases} (\overline{a_0a_1...a_k})^2 = \overline{b_0b_1...b_n}, & (1) \\ (\overline{a_ka_{k-1}...a_0})^2 = \overline{b_nb_{n-1}...b_0}. & (2) \end{cases}$$

Без ограничения общности будем считать, что $a_0 > a_k$. Тогда из (2) следует, что $a_0^2 \equiv b_0 \pmod{10} \Rightarrow a_0^2 = 10l + b_0$. Тогда из (1) следует, что $b_0 = [\frac{a_0^2}{10}]+$ переходы($[x]-$ целая часть). Пусть $l > 0 \Rightarrow a_0^2 = 16{,}25{,}36{,}49{,}64{,}81$. Но для $a_0^2 = 16{,}25{,}36{,}49$ нужно минимум 3 перехода. Что невозможно так как в столбце $2k+2$ максимум 2 перехода. Если же $a_0^2 = 64{,}81$ то потребуется минимум 2 перехода. Что также невозможно так как в столбце $2k+3$ максимум 1 переход. Противоречие. Значит $a_0^2 = b_0$ и $a_0 = 2{,}3$.

Заметим, что из (1) следует $2a_0a_1+$переходы$\equiv b_1 \pmod{10}$,а из (2) следует, что $2a_0a_1 \equiv b_1 \pmod{10} \Rightarrow 2a_0a_1 = b_1$ иначе были бы переходы в (1) при a_0^2. Значит при b_1 нет переходов. Аналогично из (1) следует $S+$переходы$\equiv b_i \pmod{10}$,а из (2) следует, что $S \equiv b_1 \pmod{10} \Rightarrow S = b_i$ иначе были бы переходы при b_{i-1}. Значит вообще нет переходов.

Если $k \geqslant 7 \Rightarrow$ коэффициент при 10^{2k-7} в (1) будет минимум $2a_0a_7+2a_1a_6+2a_2a_5+2a_3a_4 \geqslant 2\cdot2\cdot1+2+2+2 = 10$. То есть был бы переход. Противоречие. Значит $k = 6$.

Рассмотрим коэффициент при 10^6 в (1). Пусть это u. Если $a_0 > 2$ тогда $u \geqslant 2a_0a_6 + 2a_1a_5 + 2a_2a_4 + a_3^2 \geqslant 2\cdot3\cdot1 + 2+2+1 = 11$. Противоречие. Если хотя бы один из $a_i(i = 1{,}2{,}...{,}6)$ больше 1. То тогда $u \geqslant 2a_0a_6+2a_1a_5+2a_2a_4+a_3^2 \geqslant 10$. Противоречие. Значит остается только одно число 2111111. Не сложно убедится, что оно удовлетворяет требованием задачи.

Схема оценивания

1. Верный ответ **(1 балл)**.
2. Доказано, что $a_1 \leqslant 3$ или $a_k \leqslant 3$ **(1 балл)**.
3. Доказано, что все $a_i \leqslant 3$ **(1 балл)**.

4. Полное решение **(7 баллов)**.

5. Потеряны 1 или 2 случая в переборе вариантов первой и последней цифр **(−3 балла)**.

Примечание. Суммируются только пункты 1, 2 и 3.

Задача 10.3

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Найдите все такие функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^+$ выполнено

$$f(f(x)+y)-f(x)=\left(\frac{f(y)}{y}-1\right)\cdot x+f^{(m)}(y).$$

Здесь $f^{(m)}(y)=\underbrace{f(f(\ldots f(y)\ldots)}_{m \text{ раз}}$.

Ответ: $f(x)=x$.

Решение. Пусть существует такое y_0, что $\dfrac{f(y_0)}{y_0} \neq 1, \dfrac{3}{4}$.

Подставим $y=y_0$, тогда

$$f(f(x)+y_0)-f(x)=\left(\frac{f(y_0)}{y_0}-1\right)\cdot x+f^{(m)}(y_0). \qquad (1)$$

Пусть $a=\frac{f(y_0)}{y_0}-1$,$b=f^{(m)}(y)$ и $g(x)=f(x)+y_0$. Тогда из (1) следует, что

$$g(g(x))-g(x)-ax=b. \qquad (2)$$

Положим $x_0=g_1$, $g(x_0)=g_2$. Тогда

$$g(g(x))-g(x)-ax=b \Rightarrow g_{n+2}-g_{n+1}-ag_n=b, n\in\mathbb{N}.$$

Решением будет $u=u_1+u_2$, где u_1— решение однородного уравнения и u_2 — частное решение неоднородного уравнения.

Очевидно, что корни характеристического уравнения не кратны и не равны 1. Следовательно $u_2=c$, где c — константа. Отсюда

$$c-c-ac=b \Rightarrow c=-\frac{b}{a}.$$

Найдем u_1. Имеем

$$g_{n+2}-g_{n+1}-ag_n=0, \qquad (3)$$

$$g_n=c_1x_1^n+c_2x_2^n,$$

где x_1,x_2 — корни характеристического уравнения (3), c_1, c_2 — константы.

Тогда

$$\begin{cases} x_0=c_1x_1+c_2x_2-\dfrac{b}{a},\\ g(x_0)=c_1x_1^2+c_2x_2^2-\dfrac{b}{a}.\end{cases}$$

Значит,

$$g(x)=tx+k$$

где $t=x_1, k=c_2x_2(x_2-x_1)+\dfrac{b}{a}(x_1-1)$, или

$$t=x_2, k=c_1x_1(x_1-x_2)+\frac{b}{a}(x_2-1).$$

Подставим в (2), получим $c_2=0$ и $c_1=0$ соответственно. То есть

$$g(x)=tx+l \Rightarrow f(x)=tx+q.$$

Подставим в (1)

$$x(t^2-2t+\frac{q}{y}+1)+y(t^m-t)=q\left(\frac{t^m-1}{t-1}\right).$$

Так как правая часть не зависит от x, y то $q=0$. Но тогда

$$x(t^2-2t+1)=-y(t^m-t).$$

Отсюда $t = 1 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$. Противоречие.

Очевидно, что если существует такое x_0, что $f(x_0) = x_0$, то $f(x) = x$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Легко понять, что $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}^+$ подходит, а $f(x) = \frac{3}{4}x$, $x \in \mathbb{R}^+$ нет.

Схема оценивания

1. Использована замена $g(x) = f(x) + y_0$ **(2 балла)**.

2. Записано характеристическое уравнение **(1 балл)**.

3. Доказано, что в характеристическом уравнении $C_1 = 0$ или $C_2 = 0$ **(1 балл)**.

4. Полное решение **(7 баллов)**.

5. Доказательство инъективности **(0 баллов)**.

6. Доказательство сюръективности или частичной сюръективности **(0 баллов)**.

7. Не разобран случай $f(x) < x$ или $f(x) > x$ для всех x **(0 баллов)**.

Примечание. Суммируются только пункты 1, 2, 3.

Математика пәні бойынша
Республикалық оқушылар олимпиадасының
қорытынды кезеңі (2021-2022 оқу жылы)

10-сынып, 2 тур

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут.
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

4. $P(1) \leqslant 2022$ және коэффициенттері оң бүтін сан болатын 699-ыншы дәрежелі $P(x)$ көпмүшесі берілсін. Онда қосындысы 22, 55 немесе 77-ге тең болатын бірнеше қатар тұрған коэффициенттер табылатынын дәлелдеңіз.

5. Диагональдары O нүктесінде қиылысатын, шеңберге іштей сызылған дөңес $ABCD$ төртбұрышы берілген. M және N — сәйкесінше AD және BC қабырғаларының ортасы. $ABCD$ төртбұрышына сырттай сызылған шеңбердің C және D нүктелері жатпайтын AB доғасынан $\angle SMA = \angle SNB$ болатындай S нүктесі алынған. SM, SN, AB және CD түзулерінен пайда болған төртбұрыштың диагональдары T нүктесінде қиылыссын. S, O, T нүктелері бір түзудің бойында жататынын дәлелдеңіз.

6. Кез келген $n \geqslant 1$ үшін, $a_{n+2} = a_n a_{n+1} + 1$ шарты орындалатындай шексіз $\{a_n\}$ натурал сандар тізбегі берілсін. Кез келген i индексі үшін, a_j^j саны a_i^i санына бөлінетіндей $j > i$ индексі табылатынын дәлелдеңіз.

Заключительный этап
Республиканской олимпиады школьников
по математике (2021-2022 учебный год)

10 класс, 2 тур

Время работы: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

4. Дан многочлен $P(x)$ 699-й степени с положительными целыми коэффициентами, причем $P(1) \leqslant 2022$. Докажите, что найдутся несколько подряд идущих коэффициентов, сумма которых равна $22, 55$ или 77.

5. Дан вписанный выпуклый четырехугольник $ABCD$ с точкой пересечения диагоналей O. M и N — середины сторон AD и BC соответственно. На дуге AB, не содержащей точек C и D, описанной окружности $ABCD$ отметили точку S такую, что $\angle SMA = \angle SNB$. Пусть T - точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника образованного прямыми SM, SN, AB и CD. Докажите, что точки S, O, T лежат на одной прямой.

6. Бесконечная последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ удовлетворяет соотношению $a_{n+2} = a_n a_{n+1} + 1$, для любого $n \geqslant 1$. Докажите, что для любого индекса i надется такой индекс $j > i$, что a_j^j делится на a_i^i.

Решения и схемы оценивания заключительного этапа Республиканской олимпиады школьников по математике

2021-2022 учебный год

10 класс

День 2

Общие положения по проверке работ

1. Приведённые критерии оценивания являются приблизительными. Учащиеся (как и проверяющие), возможно, смогут найти и другие верные решения. Жюри имеет право вносить изменения в критерии, проголосовав за них коллегиально. Главное, чтобы все работы участников оценивались по одинаковым критериям.

2. Перед проверкой жюри следует внимательно изучить олимпиадные задания, их решения и критерии. Желательно прорешать задания самим для возможного поиска альтернативных решений.

3. По окончании проверки обязательно надо проводить разбор и апелляцию задач, притом разборы желательно делать до апелляции и при разборе рассказывать ученикам, за что снимались баллы, а за что добавлялись. Это значительно сократить число учеников желающих подать на апелляцию.

4. В целях более справедливой оценки желательно чтобы одну задачу проверял один человек (или, согласованно, одна группа). В конце, если позволяет время, то следует перепроверить горизонтально (один человек проверяет все задачи одного школьника).

5. Следует помнить, что олимпиадная работа – это не контрольная работа. При оценивании олимпиадных работ, в отличие от оценивания типовых заданий по математике, недопустимо снимать баллы за исправления в работе, за

слишком длинное решение, или если решение школьника отличается от решения, приведенного в учебных пособиях.

6. Не следует слишком строго наказывать за технические ошибки или недостатки в решении: описки, легко устранимые арифметические ошибки, непринципиальные моменты в ходе решения, напримеручастник до конца не упростил ответ, не совсем строгий порядок изложение или пропуск очевидных моментов, не влияющих в целом на ход решения. В зависимости от серьёзности ошибки или недостатка снимается не более 2 баллов, в некоторых ситуациях вообще снимать не следует.

7. Внимательно проверяйте насколько соответствует решение критериям проверки. В особенности, если решение ученика неполное и / или альтернативное официальному. Важно понять, насколько участник продвинулся по критериям, какие случае идеи он предлагает и какие факты им получены или доказаны. В альтернативного решения желательно обсудить решения и критерии для этого решения коллегиально.

8. Однако текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен оцениваться в 0 баллов. Баллы за «старание участника» не выставляются, даже если участник исписал много страниц или построил «красивый» чертёж. Если участник «угадал» правильный ответ, не приводит никаких объяснений, как он его получил, то за это не следует давать баллов.

9. Часто на олимпиадах можно встретить так называемые «счётные решения», когда участник пытается решить задачу «в лоб», опираясь только на алгебраические операции, метод координат, векторный метод, теоремы косинусов, синусов, Чевы, Менелая и т. п., не применяя никакую идею, отличного от технического счёта. Обычно такие решения (если вообще возможно решить таким способом задачу) занимают много страниц текста. К таким «счётным» решениям по сложившейся многолетней традицииприменяется следующая схема оценивания:

   - если участник смог довести своё счётное решение до конца, то он получает полные **7 баллов**;
   - если участник не довёл своё «счётное» решение до конца (независимо насколько он продвинулся) и / или допустил вычислительную ошибку — **0 баллов**.

10. На математических олимпиадах преимущественно закрепилась наилучшим образом зарекомендовавшая себя 7-балльная шкала. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Основные принципы оценивания приведены в таблице ниже. Таблица примерная, к каждой задаче следует подходить индивидуально.

Примерные критерии оценивания задач

Баллы	**Отметка**	**Правильность (ошибочность) решения**
7	$+$	Полное верное решение.
6-7	$\underset{\cdot}{+}$	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	$\underset{\bullet}{+}$ или $\underset{-}{+}$	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	$\pm$	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	$\mp$	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	$\dot{-}$	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	$-$	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	$-$	Решение отсутствует.

Задача 10.4

Дан многочлен $P(x)$ 699-й степени с положительными целыми коэффициентами, причем $P(1) \leqslant 2022$. Докажите, что найдутся несколько подряд идущих коэффициентов, сумма которых равна $22, 55$ или 77.

Решение. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{700}$ — коэффициенты многочлена, тогда $P(1) = a_1 + a_2 + \ldots + a_{700}$.

Обозначим

$$\begin{aligned}
&S_1 = a_1,\\
&S_2 = a_1 + a_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&S_{700} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{700} = P(1) \leqslant 2022.
\end{aligned}$$

Тогда составим набор

$$\left.\begin{aligned}
1 \leqslant S_1 < S_2 \ldots < S_{700},\\
S_1 + 22 < S_2 + 22 \ldots < S_{700} + 22,\\
S_1 + 77 < S_2 + 77 \ldots < S_{700} + 77.
\end{aligned}\right\} \begin{gathered}\text{всего } 700 \times 3 =\\ = 2100 \text{ чисел}\end{gathered}$$

Всего чисел 2100, и все они принадлежат промежутку $[1, 2099]$. Поэтому по принципу Дирихле какие-то из них повторяются, то есть найдутся такие i и j, что

$$\begin{aligned}
&\text{либо } S_i = S_j + 22,\\
&\text{либо } S_i = S_j + 77,\\
&\text{либо } S_i + 22 = S_j + 77.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$S_i - S_j = \left[\begin{aligned}&22,\\&55,\\&77..\end{aligned}\right.$$

Но $S_i - S_j$ — сумма подряд идущих коэффициентов многочлена $P(x)$.

Схема оценивания

1. Рассмотрение наборов сумм $S_1+22 < S_2+22 \ldots < S_{700}+22$ и / или $S_1 + 77 < S_2 + 7 \ldots < S_{700} + 77$ **(2 балла)**.

2. Попытка показать, что среди наборов сумм есть повторяющиеся **(2 балла)**.

3. Показано, что среди сумм $S_1, S_1, \ldots, S_{700}$ есть по меньшей мере 64 суммы с одинаковым остатком при делении на 11 **(2 балла)**.

4. Полное решение **(7 баллов)**.

Примечание. Суммируются только баллы только пунктов 1 и 2.

Задача 10.5

Дан вписанный выпуклый четырехугольник $ABCD$ с точкой пересечения диагоналей O. M и N – середины сторон AD и BC соответственно. На дуге AB, не содержащей точек C и D, описанной окружности $ABCD$ отметили точку S такую, что $\angle SMA = \angle SNB$. Пусть T - точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника образованного прямыми SM, SN, AB и CD. Докажите, что точки S, O, T лежат на одной прямой.

Решение. Обозначим

$$SM \cap AB = X,\ SN \cap AB = Y,$$
$$SN \cap CD = P,\ SM \cap CD = Q.$$

Тогда

$$\angle XYP = \angle ABC + \angle YNB = \angle ABC + \angle SNB$$

и

$$\angle XQP = \angle ADC - \angle QMD = \angle ADC - \angle SMA.$$

Значит

$$\angle XQP + \angle XYP = \angle ADC + \angle ABC = 180.$$

Следовательно, четырёхугольник $XYPQ$ вписанный.

Отсюда получаем, что

$$\angle QMD = \angle YNB \text{ и } \angle QDM = \angle YBN.$$

Тогда

$$\frac{QM}{AM} = \frac{QM}{DM} = \frac{YN}{BN} = \frac{YN}{CN}$$

и

$$\angle AMC = \angle YNC.$$

Следовательно, $\triangle QMA \sim YNC$. Поэтому

$$\angle QAM = \angle YCN \ \Rightarrow\ QAY = \angle PCY.$$

Значит, $QCAY$ — вписанный. Отсюда

$$\angle DBA = \angle DCA = \angle QCA = \angle QYA \ \Rightarrow\ QY \parallel DB.$$

Аналогично $PX \parallel CA$.

Пусть QS и PS пересекают AO и BO в точках U и V. Заметим, что так как четырёхугольник $ABCD$ вписанный, то $\triangle AOD \sim \triangle BOC$, и так как M и N середины соответствующих сторон, то $\triangle AOM \sim \triangle BON$.

Так как $\angle AMU = \angle SMA = \angle SNB = \angle VNB$, то $\frac{AU}{UO} = \frac{BV}{VO}$. Следовательно, $UV \parallel AB$.

Таким образом, получаем, что $\triangle XTY$ гомотетичен $\triangle UOV$, а значит S, T, O лежат на одной прямой.

Схема оценивания

1. Доказано подобие $\Delta AXM \sim \Delta CPN$ и вписанность четырехугольника $XYPQ$ **(0 баллов)**.

2. Получено отношение $\dfrac{CN}{PN} = \dfrac{AM}{XM}$ **(1 балл)**.

3. Доказано, что четырехугольник $QCAY$ вписанный **(3 балла)**.

4. Доказано, что $PX \parallel CA$ **(1 балл)**.

5. Доказано, что $UV \parallel AB$ **(2 балла)**.

6. Завершение доказательства **(1 балл)**.

Примечание. Пункты 2 и 3 не суммируются.

Задача 10.6

Бесконечная последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ удовлетворяет соотношению $a_{n+2} = a_n a_{n+1} + 1$, для любого $n \geqslant 1$. Докажите, что для любого индекса i найдется такой индекс $j > i$, что a_j^j делится на a_i^i.

К сожалению, в задаче 10.6 была допущена опечатка. Было пропущено условие $\boxed{i>1}$*. Это привело к тому, что задача стала некорректной и имеет контрпример. Нашедшим контрпример было поставлено 7 баллов. Тем кто привел верное решение, как если бы $i > 1$ было дано в условии, было поставлено 6 баллов. Последние потеряли 1 балл за то, что не заметили, что условие $i > 1$ важно.*

Решение. Пусть p_1 — простой делитель a_i.

Рассмотрим пары (a_1, a_2), (a_2, a_3), $\ldots$, $(a_{p_1^2+1}, a_{p_1^2+2})$. Так как их $p_1^2 + 1$, тогда будут две пары с одинаковыми остатками по модулю p_1. С этого момента последовательность будет повторяться по модулю p_1. Следовательно, она, начиная с некоторого момента, периодична по модулю p_1.

Докажем, что периодичность начинается с числа a_i.

По формуле

$$a_n a_{n+1} + 1 = a_{n+2},$$

если $a_{n+1} \not\equiv 0 \pmod{p_1}$, то $a_n = \dfrac{a_{n+2} - 1}{a_{n+1}}$, что вычисляется однозначно по модулю p_1. Если $i > 1$, то пары остатков будут равны $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $\ldots$, начиная с индекса i. Поэтому повторение начнётся с 0 по модулю p_1, то есть с a_i.

Значит, существует бесконечно много таких индексов j, что $a_j \equiv 0 \pmod{p_1}$, то есть найдётся достаточно большой j_1 такой, что $a_{j_1}^{j_1}$ делится на $p_1^{i \cdot v_{p_1}(a_i)}$. Это верно для любого простого p_k, делителя a_i.

Возьмём индекс $s = i + \prod\limits_k (j_k - i)$. Тогда a_s^s будет делиться на a_i^i.

Схема оценивания

1. Найден контрпример и доказано, что задача некорректна **(7 баллов)**.

2. (а) Приведено верное решение, как если бы $i > 1$ было дано **(7 баллов)**.

(б) Не указано, что условие $i > 1$ пропущено и является важным для верности решения **(−1 балл)**.

3. Объяснена периодичность последовательности **(1 балл)**.

4. Доказано, что в периодической части встречается 0 по модулю простого делителя a_i **(2 балла)**.

5. Доказано, что найдется a_j^j, который делит все степени простого делителя в a_i^i **(1 балл)**.

Примечание. Суммируются только пункты 2 (а) и 2 (б), или 3, 4, 5.