Математика пәні бойынша Республикалық оқушылар олимпиадасының қорытынды кезеңі (2021-2022 оқу жылы)

9-сынып, 1 тур

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут.
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

1. ABC тікбұрышты үшбұрышында ($\angle C = 90^\circ$) CH биіктігі жүргізілді. H нүктесінен AC және BC қабырғаларына сәйкесінше HP және HQ перпендикулярлары түсірілді. PQ түзуінің бойынан кез келген M нүктесі алынған. M нүктесінен өтетін MH түзуіне перпендикуляр болатын түзу AC және BC түзулерін сәйкесінше R және S нүктелерінде қияды. M нүктесінен басқа $M_1 \in (PQ)$ нүктесін алайық және сәйкесінше R_1 және S_1 нүктелерін қарастырайық. $\dfrac{RR_1}{SS_1}$ қатынасы тұрақты болатын дәлелдеңіз.

2. p жай саны берілген. Кез келген бүтін a саны үшін, $1 < a < \dfrac{p}{2}$, $\dfrac{p}{2} < b < p$ және $(ab-1)$ p-ға бөлінетіндей b саны табылады. Осындай барлық p санын табыңыз.

3. A натурал саны үшін $Z(A)$ деп A санын кері ретпен жазылған сан ретінде анықтаймыз (мысалы, $Z(521) = 125$). A саны ***«жақсы»*** деп аталады, егер оның ондық жүйесіндегі жазбасында нөлдер болмаса, бірінші цифры соңғысына тең болмаса және $(Z(A))^2 = Z(A^2)$. 10^6 үлкен барлық «жақсы» сандарды табыңыз.

Заключительный этап Республиканской олимпиады школьников по математике (2021-2022 учебный год)

9 класс, 1 тур

Время работы: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведена высота CH. Из точки H опустили перпендикуляры HP и HQ на стороны AC и BC соответственно. На прямой PQ выбрали произвольную точку M. Прямая, проходящая через точку M перпендикулярно MH, пересекает прямые AC и BC в точках R и S соответственно. Пусть $M_1 \in (PQ)$ — другая точка, отличная от M. Аналогично для M_1 определим соответствующие точки R_1 и S_1. Докажите, что отношение $\dfrac{RR_1}{SS_1}$ постоянно.

2. Дано некоторое простое число p. Для каждого целого числа a, $1 < a < \dfrac{p}{2}$, найдется такое целое число b, что $\dfrac{p}{2} < b < p$ и $ab-1$ делится на p. Найдите все такие p.

3. Для натурального числа A, определим $Z(A)$ как число A, записанное в обратном порядке (например, $Z(521) = 125$). Число A называется ***«хорошим»***, если в его десятичной записи нет нулей, первая цифра не равна последней, и $(Z(A))^2 = Z(A^2)$. Найдите все «хорошие» числа бóльшие 10^6.

Решения и схемы оценивания заключительного этапа Республиканской олимпиады школьников по математике

2021-2022 учебный год

9 класс

День 1

Общие положения по проверке работ

1. Приведённые критерии оценивания являются приблизительными. Учащиеся (как и проверяющие), возможно, смогут найти и другие верные решения. Жюри имеет право вносить изменения в критерии, проголосовав за них коллегиально. Главное, чтобы все работы участников оценивались по одинаковым критериям.

2. Перед проверкой жюри следует внимательно изучить олимпиадные задания, их решения и критерии. Желательно прорешать задания самим для возможного поиска альтернативных решений.

3. По окончании проверки обязательно надо проводить разбор и апелляцию задач, притом разборы желательно делать до апелляции и при разборе рассказывать ученикам, за что снимались баллы, а за что добавлялись. Это значительно сократить число учеников желающих подать на апелляцию.

4. В целях более справедливой оценки желательно чтобы одну задачу проверял один человек (или, согласованно, одна группа). В конце, если позволяет время, то следует перепроверить горизонтально (один человек проверяет все задачи одного школьника).

5. Следует помнить, что олимпиадная работа – это не контрольная работа. При оценивании олимпиадных работ, в отличие от оценивания типовых заданий по математике, недопустимо снимать баллы за исправления в работе, за

слишком длинное решение, или если решение школьника отличается от решения, приведенного в учебных пособиях.

6. Не следует слишком строго наказывать за технические ошибки или недостатки в решении: описки, легко устранимые арифметические ошибки, непринципиальные моменты в ходе решения, напримеручастник до конца не упростил ответ, не совсем строгий порядок изложение или пропуск очевидных моментов, не влияющих в целом на ход решения. В зависимости от серьёзности ошибки или недостатка снимается не более 2 баллов, в некоторых ситуациях вообще снимать не следует.

7. Внимательно проверяйте насколько соответствует решение критериям проверки. В особенности, если решение ученика неполное и / или альтернативное официальному. Важно понять, насколько участник продвинулся по критериям, какие случае идеи он предлагает и какие факты им получены или доказаны. В альтернативного решения желательно обсудить решения и критерии для этого решения коллегиально.

8. Однако текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен оцениваться в 0 баллов. Баллы за «старание участника» не выставляются, даже если участник исписал много страниц или построил «красивый» чертёж. Если участник «угадал» правильный ответ, не приводит никаких объяснений, как он его получил, то за это не следует давать баллов.

9. Часто на олимпиадах можно встретить так называемые «счётные решения», когда участник пытается решить задачу «в лоб», опираясь только на алгебраические операции, метод координат, векторный метод, теоремы косинусов, синусов, Чевы, Менелая и т. п., не применяя никакую идею, отличного от технического счёта. Обычно такие решения (если вообще возможно решить таким способом задачу) занимают много страниц текста. К таким «счётным» решениям по сложившейся многолетней традицииприменяется следующая схема оценивания:
   - если участник смог довести своё счётное решение до конца, то он получает полные **7 баллов**;
   - если участник не довёл своё «счётное» решение до конца (независимо насколько он продвинулся) и / или допустил вычислительную ошибку — **0 баллов**.

10. На математических олимпиадах преимущественно закрепилась наилучшим образом зарекомендовавшая себя 7-балльная шкала. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Основные принципы оценивания приведены в таблице ниже. Таблица примерная, к каждой задаче следует подходить индивидуально.

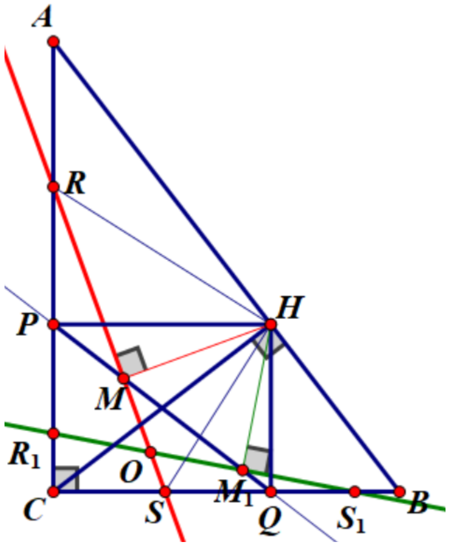
Примерные критерии оценивания задач

Баллы	**Отметка**	**Правильность (ошибочность) решения**
7	$+$	Полное верное решение.
6-7	$\underset{\cdot}{+}$	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	$\underset{\bullet}{+}$ или $\underset{-}{+}$	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	$\pm$	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	$\mp$	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	$\dot{-}$	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	$-$	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	$-$	Решение отсутствует.

Задача 9.1

В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведена высота CH. Из точки H опустили перпендикуляры HP и HQ на стороны AC и BC соответственно. На прямой PQ выбрали произвольную точку M. Прямая, проходящая через точку M перпендикулярно MH, пересекает прямые AC и BC в точках R и S соответственно. Пусть $M_1 \in (PQ)$ — другая точка, отличная от M. Аналогично для M_1 определим соответствующие точки R_1 и S_1. Докажите, что отношение $\dfrac{RR_1}{SS_1}$ постоянно.

Решение. Пусть прямые RS и R_1S_1 пересекаются в точке O.



Так как H, R, P, M лежат на одной окружности с диаметром HR, и точки P, H, R_1, M_1 — на окружности с диаметром HR_1, то $\angle(MR, HR) = \angle(MP, HP) = \angle(M_1R_1, HR_1)$.

Аналогично, $\angle(HS, MS) = \angle(HQ, M_1Q) = \angle(HS_1, MS_1)$.

Следовательно, треугольники HR_1R и HS_1S подобны, а в них отрезки HP и HQ являются соответствующими высотами. Поэтому $RR_1/SS_1 = HP/HQ = \text{const}$.

Схема оценивания

1. Показано, что точки H, R, P, M лежат на одной окружности и / или точки P, H, R_1, M_1 лежат на одной окружности **(1 балл)**.

2. Показано, что точки H, M, O и S лежат на одной окружности **(1 балл)**.

3. Показано, что треугольники HR_1R и HS_1S подобны **(6 баллов)**.

4. Полное решение **(7 баллов)**

Примечание. Баллы пунктов 3 и 4 не суммируются не суммируются с другими пунктами.

Задача 9.2

Дано некоторое простое число p. Для каждого целого числа a, $1 < a < \frac{p}{2}$, найдется такое целое число b, что $\frac{p}{2} < b < p$ и $ab-1$ делится на p. Найдите все такие p.

Ответ: $p = 5{,}7{,}13$.

Решение.

Пусть $p > 20$. Очевидно,что $p-1$ делится на 2,3,4. Заметим, что одно из $p+1, 2p+1, 3p+1, 4p+1$ делится на 5. Легко понять, что это или $3p+1$ или $4p+1$. Если $3p+1$ то $10, \frac{3p+1}{10} < \frac{p}{2}$. Противоречие. Следовательно $p-1$ делится на $2{,}3{,}4{,}5{,}6 \Rightarrow p = 60k+1$. Если $p = 61$ то $8 \cdot 23 \equiv 1 \pmod{61}$. Противоречие. Следовательно, $p \geqslant 121$.

Каждое из чисел в парах

$$\left(7,\frac{p+1}{7}\right), \left(7,\frac{2p+1}{7}\right), \left(7,\frac{3p+1}{7}\right), \left(35,\frac{4p+1}{7}\right), \left(42,\frac{5p+1}{42}\right)$$

меньше чем $\frac{p}{2}$, следовательно, $p-1$ делится на 7.

Теперь пусть $p \equiv 1 \pmod{k}$, и $\frac{p}{2} > n \geqslant 8$ для всех $k < n$. Докажем, что $p \equiv 1 \pmod{n}$.

Очевидно, что $p > 2n^2$. Тогда в паре $\left(n(k+1), \frac{kp+1}{n(k+1)}\right)$ числа меньше чем $\frac{p}{2}$, где $k = 1, 2, \ldots, n-2$, значит,

$$(n-1)p \equiv -1 \pmod{n} \Rightarrow p \equiv 1 \pmod{n}.$$

Но тогда $p-1$ делится на НОК$(\frac{p-1}{2}, \frac{p-3}{2})$, отсюда $p-1 \geqslant \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-3}{2}$. Противоречие.

Осталось рассмотреть все простые меньше чем 20. Подходят только 5, 7, 13, так как $3 \cdot 4 - 1, 3 \cdot 6 - 1, 4 \cdot 5 - 1$ делится на 11, 17, 19 соответственно, а при 2, 3 чисел a вообще нет.

Схема оценивания

1. Показано, что для любого a найдётся единственное b такое, что $ab \equiv 1 \pmod{p}$, где $1 < a < \frac{p}{2}, \frac{p}{2} < b < p$ **(0 баллов)**.

2. Получено, что $p \equiv 1 \pmod{3}$ и $p \equiv 1 \pmod{4}$ **(1 балл)**.

3. Получено, что $p \equiv 1 \pmod{5}$ и $p \equiv 1 \pmod{6}$ **(1 балл)**.

4. Показано, что если $p \equiv 1 \pmod{k}$ для всех $k < n$, то $p \equiv 1 \pmod{1}$ **(4 балла)**.

5. Правильный ответ **(1 балл)**.

6. Показано, что $p = 6k-1$ для всех $k > 1$ не подходит **(1 балл)**.

Задача 9.3

Для натурального числа A, определим $Z(A)$ как число A, записанное в обратном порядке (например, $Z(521) = 125$). Число A называется ***«хорошим»***, если в его десятичной записи нет нулей, первая цифра не равна последней, и $(Z(A))^2 = Z(A^2)$. Найдите все «хорошие» числа бо́льшие 10^6.

Ответ: 1111112, 2111111.

Решение.

$$\begin{array}{r}
\times \begin{array}{r} a_1\ a_2\ \ldots\ a_n \\ b_1\ b_2\ \ldots\ b_n \end{array} \\
\hline
c_{11}\, c_{12}\ \ldots\ c_{1n}\, c_{1\,n+1} \\
c_{21}\, c_{22}\ \ldots\ c_{2n}\ \ldots\ c_{2\,n+1} \qquad \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad\qquad \\
c_{n1}\, c_{n2}\ \ldots\ c_{nn} \qquad\qquad\qquad\qquad \\
\hline
\end{array}$$

Заметим, что если $k \leqslant n+1$ то в $k-$том столбце максимум $k-1$ переходов, в столбце $n+2$ максимум n переходов. В столбце $n+3$ максимум $n-1$ переходов и.т.д.В столбце $2n+1$ максимум 1 переход. Если есть столбец $2n+2$, то в нём нет переходов.

Пусть

$$\begin{cases} (\overline{a_0a_1...a_k})^2 = \overline{b_0b_1...b_n}, (1) \\ (\overline{a_ka_{k-1}...a_0})^2 = \overline{b_nb_{n-1}...b_0}.(2) \end{cases}$$

Без ограничения общности будем считать, что $a_0 > a_k$. Тогда

из (2) следует, что $a_0^2 \equiv b_0 \pmod{10} \Rightarrow a_0^2 = 10l + b_0$. Тогда из (1) следует, что $b_0 = [\frac{a_0^2}{10}]+$ переходы($[x]-$ целая часть). Пусть $l > 0 \Rightarrow a_0^2 = 16{,}25{,}36{,}49{,}64{,}81$. Но для $a_0^2 = 16{,}25{,}36{,}49$ нужно минимум 3 перехода. Что невозможно так как в столбце $2k+2$ максимум 2 перехода. Если же $a_0^2 = 64{,}81$ то потребуется минимум 2 перехода. Что также невозможно так как в столбце $2k+3$ максимум 1 переход. Противоречие. Значит $a_0^2 = b_0$ и $a_0 = 2{,}3$.

Заметим, что из (1) следует $2a_0a_1+$переходы$\equiv b_1 \pmod{10}$,а из (2) следует, что $2a_0a_1 \equiv b_1 \pmod{10} \Rightarrow 2a_0a_1 = b_1$ иначе были бы переходы в (1) при a_0^2. Значит при b_1 нет переходов. Аналогично из (1) следует $S+$переходы$\equiv b_i \pmod{10}$,а из (2) следует, что $S \equiv b_1 \pmod{10} \Rightarrow S = b_i$ иначе были бы переходы при b_{i-1}. Значит вообще нет переходов.

Если $k \geqslant 7 \Rightarrow$ коэффициент при 10^{2k-7} в (1) будет минимум $2a_0a_7+2a_1a_6+2a_2a_5+2a_3a_4 \geqslant 2\cdot2\cdot1+2+2+2 = 10$. То есть был бы переход. Противоречие. Значит $k = 6$.

Рассмотрим коэффициент при 10^6 в (1). Пусть это u. Если $a_0 > 2$ тогда $u \geqslant 2a_0a_6 + 2a_1a_5 + 2a_2a_4 + a_3^2 \geqslant 2\cdot3\cdot1 + 2 + 2 + 1 = 11$. Противоречие. Если хотя бы один из $a_i(i = 1{,}2{,}...{,}6)$ больше 1. То тогда $u \geqslant 2a_0a_6+2a_1a_5+2a_2a_4+a_3^2 \geqslant 10$. Противоречие. Значит остается только одно число 2111111. Не сложно убедится, что оно удовлетворяет требованием задачи.

Схема оценивания

1. Верный ответ **(1 балл)**.
2. Доказано, что $a_1 \leqslant 3$ или $a_k \leqslant 3$ **(1 балл)**.
3. Доказано, что все $a_i \leqslant 3$ **(1 балл)**.

4. Полное решение **(7 баллов)**.

5. Потеряны 1 или 2 случая в переборе вариантов первой и последней цифр **(−3 балла)**.

Примечание. Суммируются только пункты 1, 2 и 3.

Математика пәні бойынша Республикалық оқушылар олимпиадасының қорытынды кезеңі (2021-2022 оқу жылы)

9-сынып, 2 тур

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут.
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

4. Іргелес бұрыштардың биссектрисаларынан P және Q нүктелері алынды және осы іргелес бұрыштардың қабырғаларына PA, PB, QC және QD биіктіктері жүргізілді. AB, CD және PQ түзулері бір нүктеде қиылысатынын дәлелдеңіз

5. a, b, c оң сандары үшін, $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geqslant 3$теңсіздігі орындалады. Келесі теңсіздікті дәлелдеңіз

$$\frac{a^3}{a^2+b}+\frac{b^3}{b^2+c}+\frac{c^3}{c^2+a} \geqslant \frac{3}{2}.$$

6. 35-ке 35 кестесі берілген, оның ұяшықтарына 1-ден 49-ға дейінгі сандар кездейсоқ ретпен орналастырылған және әр i саны i рет қолданылған. Кестеден кейбір ұяшықтар кездейсоқ алынып тасталынады, содан кейін ол қабырға бойынша жалғанған ұяшықты көпбұрыштарға бөлінеді. Олардың ішінен ауданы ең үлкен болатын біреуі таңдалады (егер ондайдан бірнеше болса, онда кездейсоқ біреуі алынады). Таңдалған көпбұрышта кейбір санның кемінде 15 рет кездесуіне кепілдік беру үшін кестеден алып тастауға болатын ұяшықтардың ең көп саны қандай болуы мүмкін?

Заключительный этап Республиканской олимпиады школьников по математике (2021-2022 учебный год)

9 класс, 2 тур

Время работы: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

4. На биссектрисах смежных углов выбраны точки P и Q, из которых опущены перпендикуляры на стороны этих смежных углов: PA, PB, QC, QD. Докажите, что прямые AB, CD и PQ пересекаются в одной точке.

5. Положительные числа a, b, c таковы, что $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geqslant 3$. Докажите, что

$$\frac{a^3}{a^2+b}+\frac{b^3}{b^2+c}+\frac{c^3}{c^2+a} \geqslant \frac{3}{2}.$$

6. Дана таблица 35 на 35, в клетках которой случайным образом расставлены числа от 1 до 49, причем каждое число i использовалось i раз. Из таблицы наудачу удаляются некоторые клетки, после чего она распадается на связные по сторонам клетчатые многоугольники. Из них выбирается один с наибольшей площадью (если таких несколько, то берется случайный). Какое наибольшее количество клеток можно было удалить из таблицы, чтобы некоторое число гарантированно встретилось в выбранном многоугольнике хотя бы 15 раз.

Решения и схемы оценивания заключительного этапа Республиканской олимпиады школьников по математике

2021-2022 учебный год

9 класс

День 2

Общие положения по проверке работ

1. Приведённые критерии оценивания являются приблизительными. Учащиеся (как и проверяющие), возможно, смогут найти и другие верные решения. Жюри имеет право вносить изменения в критерии, проголосовав за них коллегиально. Главное, чтобы все работы участников оценивались по одинаковым критериям.

2. Перед проверкой жюри следует внимательно изучить олимпиадные задания, их решения и критерии. Желательно прорешать задания самим для возможного поиска альтернативных решений.

3. По окончании проверки обязательно надо проводить разбор и апелляцию задач, притом разборы желательно делать до апелляции и при разборе рассказывать ученикам, за что снимались баллы, а за что добавлялись. Это значительно сократить число учеников желающих подать на апелляцию.

4. В целях более справедливой оценки желательно чтобы одну задачу проверял один человек (или, согласованно, одна группа). В конце, если позволяет время, то следует перепроверить горизонтально (один человек проверяет все задачи одного школьника).

5. Следует помнить, что олимпиадная работа – это не контрольная работа. При оценивании олимпиадных работ, в отличие от оценивания типовых заданий по математике, недопустимо снимать баллы за исправления в работе, за

слишком длинное решение, или если решение школьника отличается от решения, приведенного в учебных пособиях.

6. Не следует слишком строго наказывать за технические ошибки или недостатки в решении: описки, легко устранимые арифметические ошибки, непринципиальные моменты в ходе решения, напримеручастник до конца не упростил ответ, не совсем строгий порядок изложение или пропуск очевидных моментов, не влияющих в целом на ход решения. В зависимости от серьёзности ошибки или недостатка снимается не более 2 баллов, в некоторых ситуациях вообще снимать не следует.

7. Внимательно проверяйте насколько соответствует решение критериям проверки. В особенности, если решение ученика неполное и / или альтернативное официальному. Важно понять, насколько участник продвинулся по критериям, какие случае идеи он предлагает и какие факты им получены или доказаны. В альтернативного решения желательно обсудить решения и критерии для этого решения коллегиально.

8. Однако текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен оцениваться в 0 баллов. Баллы за «старание участника» не выставляются, даже если участник исписал много страниц или построил «красивый» чертёж. Если участник «угадал» правильный ответ, не приводит никаких объяснений, как он его получил, то за это не следует давать баллов.

9. Часто на олимпиадах можно встретить так называемые «счётные решения», когда участник пытается решить задачу «в лоб», опираясь только на алгебраические операции, метод координат, векторный метод, теоремы косинусов, синусов, Чевы, Менелая и т. п., не применяя никакую идею, отличного от технического счёта. Обычно такие решения (если вообще возможно решить таким способом задачу) занимают много страниц текста. К таким «счётным» решениям по сложившейся многолетней традицииприменяется следующая схема оценивания:

   - если участник смог довести своё счётное решение до конца, то он получает полные **7 баллов**;
   - если участник не довёл своё «счётное» решение до конца (независимо насколько он продвинулся) и / или допустил вычислительную ошибку — **0 баллов**.

10. На математических олимпиадах преимущественно закрепилась наилучшим образом зарекомендовавшая себя 7-балльная шкала. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Основные принципы оценивания приведены в таблице ниже. Таблица примерная, к каждой задаче следует подходить индивидуально.

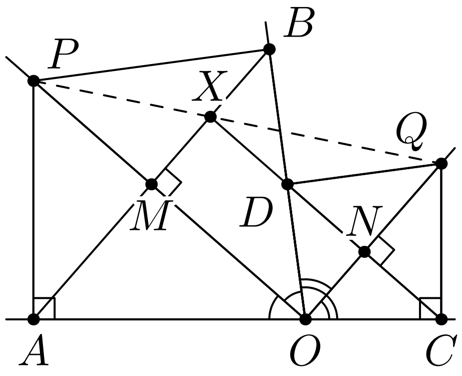
Примерные критерии оценивания задач

Баллы	**Отметка**	**Правильность (ошибочность) решения**
7	$+$	Полное верное решение.
6-7	$\underset{\cdot}{+}$	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	$\underset{\bullet}{+}$ или $\underset{-}{+}$	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	$\pm$	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	$\mp$	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	$\dot{-}$	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	$-$	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	$-$	Решение отсутствует.

Задача 9.4

На биссектрисах смежных углов выбраны точки P и Q, из которых опущены перпендикуляры на стороны этих смежных углов: PA, PB, QC, QD. Докажите, что прямые AB, CD и PQ пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть O общая вершина данных смежных углов. Обозначим точку пересечения прямых AB и CD через X. Требуется доказать, что точки P, Q, X лежат на одной прямой. Известно, что биссектрисы смежных углов перпендикулярны, поэтому $\angle POQ$ прямой. Также понятно, что, если $PO \cap AM = M$, то, в силу симметрии, $\angle OMB = 90°$. Аналогично, если $OQ \cap CD = N$, то $\angle OND = 90°$.



Рассмотрим прямоугольные треугольники PMX и XNQ. Если докажем, что они подобны, то задача решена, так как будет выполнено равенство $\angle PXM + \angle MXN + \angle NXQ = 180°$. Для этого достаточно показать

$$PM/XN = XM/QN. \tag{1}$$

Так как $OMXN$ — прямоугольник, то

$$XN = OM, XM = ON.$$

Следовательно, условие (1) эквивалентно

$$\frac{PM}{XN} = \frac{XM}{QN} \iff \frac{PM}{OM} = \frac{ON}{QN}$$

Но последнее верно в силу того, что $\triangle OAP \sim \triangle QCO$, а AM и CN соответствующие высоты в этих треугольниках.

Схема оценивания

1. Задача сведена к тождеству (1)**(1 балл)**.
2. Полное решение **(7 баллов)**.

Примечание. Баллы пунктов 1 и 2 не суммируются.

Задача 9.5

Положительные числа a, b, c таковы, что $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geqslant 3$. Докажите, что

$$\frac{a^3}{a^2+b}+\frac{b^3}{b^2+c}+\frac{c^3}{c^2+a} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Решение. Очевидно, что из неравенства Коши следует

$$\frac{a^3}{a^2+b}+\frac{b^3}{b^2+c}+\frac{c^3}{c^2+a} =$$
$$= a+b+c-\frac{ab}{a^2+b}-\frac{bc}{b^2+c}-\frac{ca}{c^2+a} \geqslant$$
$$\geqslant a+b+c-\frac{ab}{2a\sqrt{b}}-\frac{bc}{2b\sqrt{c}}-\frac{ca}{2c\sqrt{a}}.$$

Далее из неравенства Коши-Буняковского-Шварца следует

$$\frac{a^3}{a^2+b}+\frac{b^3}{b^2+c}+\frac{c^3}{c^2+a} \geqslant$$
$$\geqslant a+b+c-\frac{ab}{2a\sqrt{b}}-\frac{bc}{2b\sqrt{c}}-\frac{ca}{2c\sqrt{a}} =$$
$$= a+b+c-\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{\sqrt{b}}{2}-\frac{\sqrt{c}}{2} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{3}-\frac{\sqrt{b}}{2}-\frac{\sqrt{c}}{2}-\frac{\sqrt{a}}{2} =$$
$$= (\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}-\frac{1}{2}\right) \geqslant 3\cdot\left(\frac{3}{3}-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Схема оценивания

1. Использовано тождество $\frac{a^3}{a^2+b} = a - \frac{ab}{a^2+b}$ **(2 балла)**.

2. Полное решение **(7 баллов)**.

Примечание. Баллы пунктов 1 и 2 не суммируются.

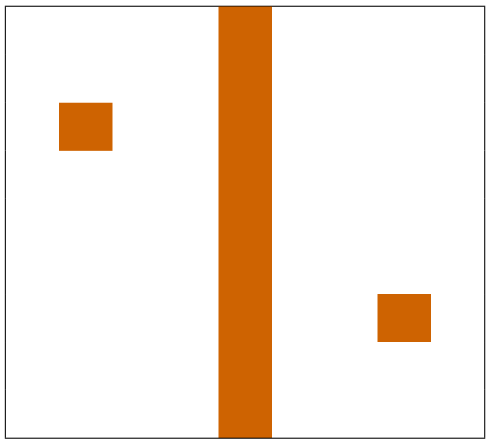
Задача 9.6

Дана таблица 35 на 35, в клетках которой случайным образом расставлены числа от 1 до 49, причем каждое число i использовалось i раз. Из таблицы наудачу удаляются некоторые клетки, после чего она распадается на связные по сторонам клетчатые многоугольники. Из них выбирается один с наибольшей площадью (если таких несколько, то берется случайный). Какое наибольшее количество клеток можно было удалить из таблицы, чтобы некоторое число гарантированно встретилось в выбранном многоугольнике хотя бы 15 раз.

Ответ: 34.

Решение. Докажем, что если удалить хотя бы 35 клеток, то гарантировать 15 повторений нельзя.

Удалим 35 клеток в серединном столбце, а остальные удалим случайным образом.



Наибольший многоугольник в этом случае будет иметь не более $\dfrac{35^2-35}{2} = 595$ клеток.

Так как числа были расставлены случайно, то в выбранном многоугольнике могли оказаться только числа от 1 до 14 и числа от 15 до 49 по 14 раз, (всего $\frac{14 \cdot 15}{2} + 14 \cdot (49-15+1) = 595$ чисел). Следовательно, никакое число не повторилось 15 раз.

Докажем теперь, что если удалить 34 клетки, то в наибольшем многоугольнике будет хотя бы 596 клеток.

Пусть удалённые клетки содержатся в некоторых m строках. Для начала добавим все целые строки (пока они смогут быть несвязанными).

Возьмём одну из m строк, соседних с уже добавленными. Пусть она содержит x_1 неудалённых клеток. Добавим их в наш многоугольник.

Возьмём следующую из m строк, соседнюю с уже рассмотренными. Пусть она содержит x_2 неудалённых клеток. Тогда из них $35 - x_1$ могут граничить с удалёнными в соседней строке и их добавить нельзя. Максимум можно добавить $x_2 - (35 - x_1) = x_1 + x_2 - 35$ клеток.

Продолжим так добавлять все m строк. Если рассмотреть весь процесс с конца, в последней строке мы добавим хотя бы одну клетку, так как тех, которые граничат с удалёнными во всех предыдущих строках не более 34.

В строке до этого было добавлено хотя бы 2 клетки, так как граничащих с удалёнными не более 33 и так далее.

В итоге наш многоугольник окажется связным, так как в каждой строке присутствует хотя бы одна клетка. Он будет содержать хотя бы

$$\begin{gathered}1+2+\cdots+m+35\cdot(35-m)= \\ =\underbrace{1+2+\cdots+m+35+35+\cdots+35}_{35\text{ слагаемых}}\geqslant \\ \geqslant 1+2+\cdots+35=\frac{35\cdot 36}{2}=630\text{ клеток.}\end{gathered}$$

Схема оценивания

1. (а) Доказано, что в многоугольнике с площадью 595 может не встретиться 15 повторений одного числа **(2 балла)**.

(б) Доказано, что при удалении $\geqslant 35$ клеток в выбранном многоугольнике может не встретиться 15 повторений одного числа **(3 балла)**.

2. (а) Доказано, что при удалении 34 клеток максимальный многоугольник будет целиком содержать две стороны квадрата **(1 балл)**.

(б) Доказано, что при удалении 34 клеток максимальный многоугольник будет содержать как минимум 596 клеток **(3 балла)**.

3. Правильный ответ **(1 балл)**.

Примечание. Баллы пунктов 1, 2, 3 суммируются. Баллы подпунктов (а) и (б) в каждом пункте не суммируются.