Математика пәні бойынша Республикалық оқушылар олимпиадасының қорытынды кезеңі (2021-2022 оқу жылы)

9-сынып, 2 тур

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут.
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

4. Іргелес бұрыштардың биссектрисаларынан P және Q нүктелері алынды және осы іргелес бұрыштардың қабырғаларына PA, PB, QC және QD биіктіктері жүргізілді. AB, CD және PQ түзулері бір нүктеде қиылысатынын дәлелдеңіз

5. a, b, c оң сандары үшін, $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geqslant 3$теңсіздігі орындалады. Келесі теңсіздікті дәлелдеңіз

$$\frac{a^3}{a^2+b}+\frac{b^3}{b^2+c}+\frac{c^3}{c^2+a} \geqslant \frac{3}{2}.$$

6. 35-ке 35 кестесі берілген, оның ұяшықтарына 1-ден 49-ға дейінгі сандар кездейсоқ ретпен орналастырылған және әр i саны i рет қолданылған. Кестеден кейбір ұяшықтар кездейсоқ алынып тасталынады, содан кейін ол қабырға бойынша жалғанған ұяшықты көпбұрыштарға бөлінеді. Олардың ішінен ауданы ең үлкен болатын біреуі таңдалады (егер ондайдан бірнеше болса, онда кездейсоқ біреуі алынады). Таңдалған көпбұрышта кейбір санның кемінде 15 рет кездесуіне кепілдік беру үшін кестеден алып тастауға болатын ұяшықтардың ең көп саны қандай болуы мүмкін?

Заключительный этап Республиканской олимпиады школьников по математике (2021-2022 учебный год)

9 класс, 2 тур

Время работы: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

4. На биссектрисах смежных углов выбраны точки P и Q, из которых опущены перпендикуляры на стороны этих смежных углов: PA, PB, QC, QD. Докажите, что прямые AB, CD и PQ пересекаются в одной точке.

5. Положительные числа a, b, c таковы, что $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geqslant 3$. Докажите, что

$$\frac{a^3}{a^2+b}+\frac{b^3}{b^2+c}+\frac{c^3}{c^2+a} \geqslant \frac{3}{2}.$$

6. Дана таблица 35 на 35, в клетках которой случайным образом расставлены числа от 1 до 49, причем каждое число i использовалось i раз. Из таблицы наудачу удаляются некоторые клетки, после чего она распадается на связные по сторонам клетчатые многоугольники. Из них выбирается один с наибольшей площадью (если таких несколько, то берется случайный). Какое наибольшее количество клеток можно было удалить из таблицы, чтобы некоторое число гарантированно встретилось в выбранном многоугольнике хотя бы 15 раз.

Решения заключительного этапа Республиканской олимпиады школьников по математике

2021-2022 учебный год

9 класс

День 2

Общие положения по проверке работ

1. Приведённые критерии оценивания являются приблизительными. Учащиеся (как и проверяющие), возможно, смогут найти и другие верные решения. Жюри имеет право вносить изменения в критерии, проголосовав за них коллегиально. Главное, чтобы все работы участников оценивались по одинаковым критериям.

2. Перед проверкой жюри следует внимательно изучить олимпиадные задания, их решения и критерии. Желательно прорешать задания самим для возможного поиска альтернативных решений.

3. По окончании проверки обязательно надо проводить разбор и апелляцию задач, притом разборы желательно делать до апелляции и при разборе рассказывать ученикам, за что снимались баллы, а за что добавлялись. Это значительно сократить число учеников желающих подать на апелляцию.

4. В целях более справедливой оценки желательно чтобы одну задачу проверял один человек (или, согласованно, одна группа). В конце, если позволяет время, то следует перепроверить горизонтально (один человек проверяет все задачи одного школьника).

5. Следует помнить, что олимпиадная работа – это не контрольная работа. При оценивании олимпиадных работ, в отличие от оценивания типовых заданий по математике, недопустимо снимать баллы за исправления в работе, за

слишком длинное решение, или если решение школьника отличается от решения, приведенного в учебных пособиях.

6. Не следует слишком строго наказывать за технические ошибки или недостатки в решении: описки, легко устранимые арифметические ошибки, непринципиальные моменты в ходе решения, напримеручастник до конца не упростил ответ, не совсем строгий порядок изложение или пропуск очевидных моментов, не влияющих в целом на ход решения. В зависимости от серьёзности ошибки или недостатка снимается не более 2 баллов, в некоторых ситуациях вообще снимать не следует.

7. Внимательно проверяйте насколько соответствует решение критериям проверки. В особенности, если решение ученика неполное и / или альтернативное официальному. Важно понять, насколько участник продвинулся по критериям, какие случае идеи он предлагает и какие факты им получены или доказаны. В альтернативного решения желательно обсудить решения и критерии для этого решения коллегиально.

8. Однако текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен оцениваться в 0 баллов. Баллы за «старание участника» не выставляются, даже если участник исписал много страниц или построил «красивый» чертёж. Если участник «угадал» правильный ответ, не приводит никаких объяснений, как он его получил, то за это не следует давать баллов.

9. Часто на олимпиадах можно встретить так называемые «счётные решения», когда участник пытается решить задачу «в лоб», опираясь только на алгебраические операции, метод координат, векторный метод, теоремы косинусов, синусов, Чевы, Менелая и т. п., не применяя никакую идею, отличного от технического счёта. Обычно такие решения (если вообще возможно решить таким способом задачу) занимают много страниц текста. К таким «счётным» решениям по сложившейся многолетней традицииприменяется следующая схема оценивания:

   - если участник смог довести своё счётное решение до конца, то он получает полные **7 баллов**;
   - если участник не довёл своё «счётное» решение до конца (независимо насколько он продвинулся) и / или допустил вычислительную ошибку — **0 баллов**.

10. На математических олимпиадах преимущественно закрепилась наилучшим образом зарекомендовавшая себя 7-балльная шкала. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Основные принципы оценивания приведены в таблице ниже. Таблица примерная, к каждой задаче следует подходить индивидуально.

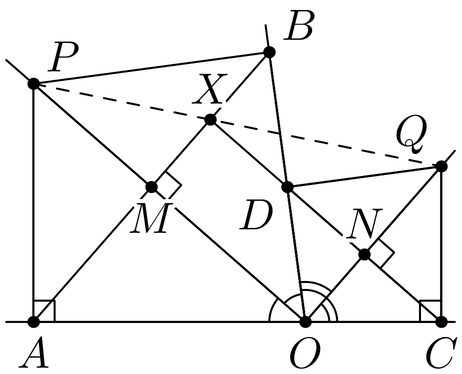
Примерные критерии оценивания задач

Баллы	Отметка	Правильность (ошибочность) решения
7	$+$	Полное верное решение.
6-7	$\underset{\cdot}{+}$	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	$\underset{\bullet}{+}$ или $\underset{-}{+}$	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	$\pm$	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка $+$ пример» верно получена оценка.
2-3	$\mp$	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	$\dot{-}$	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	$-$	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	$-$	Решение отсутствует.

Задача 9.4

На биссектрисах смежных углов выбраны точки P и Q, из которых опущены перпендикуляры на стороны этих смежных углов: PA, PB, QC, QD. Докажите, что прямые AB, CD и PQ пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть O общая вершина данных смежных углов. Обозначим точку пересечения прямых AB и CD через X. Требуется доказать, что точки P, Q, X лежат на одной прямой. Известно, что биссектрисы смежных углов перпендикулярны, поэтому $\angle POQ$ прямой. Также понятно, что, если $PO \cap AM = M$, то, в силу симметрии, $\angle OMB = 90°$. Аналогично, если $OQ \cap CD = N$, то $\angle OND = 90°$.



Рассмотрим прямоугольные треугольники PMX и XNQ. Если докажем, что они подобны, то задача решена, так как будет выполнено равенство $\angle PXM + \angle MXN + \angle NXQ = 180°$. Для этого достаточно показать

$$PM/XN = XM/QN. \qquad (1)$$

Так как $OMXN$ — прямоугольник, то

$$XN = OM, XM = ON.$$

Следовательно, условие (1) эквивалентно

$$\frac{PM}{XN} = \frac{XM}{QN} \iff \frac{PM}{OM} = \frac{ON}{QN}$$

Но последнее верно в силу того, что $\triangle OAP \sim \triangle QCO$, а AM и CN соответствующие высоты в этих треугольниках.

Задача 9.5

Положительные числа a, b, c таковы, что $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geqslant 3$. Докажите, что

$$\frac{a^3}{a^2+b}+\frac{b^3}{b^2+c}+\frac{c^3}{c^2+a} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Решение. Очевидно, что из неравенства Коши следует

$$\frac{a^3}{a^2+b}+\frac{b^3}{b^2+c}+\frac{c^3}{c^2+a} =$$
$$= a+b+c-\frac{ab}{a^2+b}-\frac{bc}{b^2+c}-\frac{ca}{c^2+a} \geqslant$$
$$\geqslant a+b+c-\frac{ab}{2a\sqrt{b}}-\frac{bc}{2b\sqrt{c}}-\frac{ca}{2c\sqrt{a}}.$$

Далее из неравенства Коши-Буняковского-Шварца следует

$$\frac{a^3}{a^2+b}+\frac{b^3}{b^2+c}+\frac{c^3}{c^2+a} \geqslant$$
$$\geqslant a+b+c-\frac{ab}{2a\sqrt{b}}-\frac{bc}{2b\sqrt{c}}-\frac{ca}{2c\sqrt{a}} =$$
$$= a+b+c-\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{\sqrt{b}}{2}-\frac{\sqrt{c}}{2} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{3}-\frac{\sqrt{b}}{2}-\frac{\sqrt{c}}{2}-\frac{\sqrt{a}}{2} =$$
$$= (\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}-\frac{1}{2}\right) \geqslant 3\cdot\left(\frac{3}{3}-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

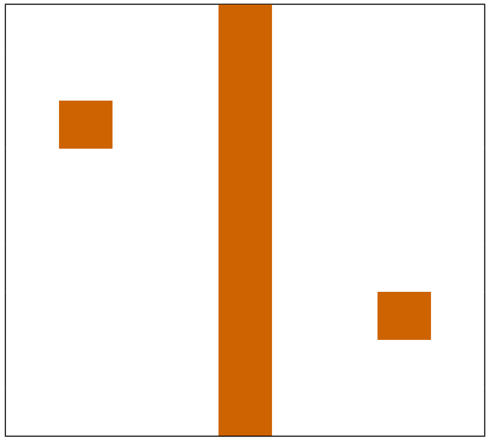
Задача 9.6

Дана таблица 35 на 35, в клетках которой случайным образом расставлены числа от 1 до 49, причем каждое число i использовалось i раз. Из таблицы наудачу удаляются некоторые клетки, после чего она распадается на связные по сторонам клетчатые многоугольники. Из них выбирается один с наибольшей площадью (если таких несколько, то берется случайный). Какое наибольшее количество клеток можно было удалить из таблицы, чтобы некоторое число гарантированно встретилось в выбранном многоугольнике хотя бы 15 раз.

Ответ: 34.

Решение. Докажем, что если удалить хотя бы 35 клеток, то гарантировать 15 повторений нельзя.

Удалим 35 клеток в серединном столбце, а остальные удалим случайным образом.



Наибольший многоугольник в этом случае будет иметь не более $\dfrac{35^2-35}{2} = 595$ клеток.

Так как числа были расставлены случайно, то в выбранном многоугольнике могли оказаться только числа от 1 до 14 и числа от 15 до 49 по 14 раз, (всего $\frac{14\cdot 15}{2} + 14\cdot(49-15+1) = 595$ чисел). Следовательно, никакое число не повторилось 15 раз.

Докажем теперь, что если удалить 34 клетки, то в наибольшем многоугольнике будет хотя бы 596 клеток.

Пусть удалённые клетки содержатся в некоторых m строках. Для начала добавим все целые строки (пока они смогут быть несвязанными).

Возьмём одну из m строк, соседних с уже добавленными. Пусть она содержит x_1 неудалённых клеток. Добавим их в наш многоугольник.

Возьмём следующую из m строк, соседнюю с уже рассмотренными. Пусть она содержит x_2 неудалённых клеток. Тогда из них $35 - x_1$ могут граничить с удалёнными в соседней строке и их добавить нельзя. Максимум можно добавить $x_2 - (35 - x_1) = x_1 + x_2 - 35$ клеток.

Продолжим так добавлять все m строк. Если рассмотреть весь процесс с конца, в последней строке мы добавим хотя бы одну клетку, так как тех, которые граничат с удалёнными во всех предыдущих строках не более 34.

В строке до этого было добавлено хотя бы 2 клетки, так как граничащих с удалёнными не более 33 и так далее.

В итоге наш многоугольник окажется связным, так как в каждой строке присутствует хотя бы одна клетка. Он будет содержать хотя бы

$$1+2+\dots+m+35\cdot(35-m)=$$
$$=\underbrace{1+2+\dots+m+35+35+\dots+35}_{35\text{ слагаемых}}\geqslant$$
$$\geqslant 1+2+\dots+35=\frac{35\cdot 36}{2}=630\text{ клеток.}$$