

Математика пәні бойынша
Республикалық оқушылар олимпиадасының
қорытынды кезеңі (2021-2022 оқу жылы)

11-сынып, 1 тур

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут.

Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

1. ABC сүйірбұрышты үшбұрышында AD , BE және CF биіктіктері жүргізілді. $PQ \parallel BC$ болатындай AB және AC кесінділерінен сәйкесінше P және Q нүктелері алынған. Диаметрлері BQ және CP болатын шеңберлер R және T нүктелерінде қиылысады (A нүктесіне T нүктесінен қарағанда R нүктесі жақын). CM және BN — BCR үшбұрышының биіктіктері болсын. FM , NE және AD түзулері бір нүктеде қиылысатынын дәлелдеңіз.
2. A натурал саны үшін $Z(A)$ деп A санын кері ретпен жазылған сан ретінде анықтаймыз (мысалы, $Z(521) = 125$). A саны «**жақсы**» деп аталады, егер оның ондық жүйесіндегі жазбасында нөлдер болмаса, бірінші цифры соңғысына тең болмаса және $(Z(A))^2 = Z(A^2)$. 10^6 үлкен барлық «жақсы» сандарды табыңыз.
3. $m \in \mathbb{N}$ болсын. Кез келген $x, y \in \mathbb{R}^+$ үшін келесі шарт орындалатындай барлық $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ функцияларын табыңыз

$$f(f(x) + y) - f(x) = \left(\frac{f(y)}{y} - 1 \right) \cdot x + f^{(m)}(y).$$

Бұл жердегі $f^{(m)}(y) = f(f(\dots f(y)\dots))$.
 m раз

Заключительный этап
Республиканской олимпиады школьников
по математике (2021-2022 учебный год)

11 класс, 1 тур

Время работы: 4 часа 30 минут.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

1. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AD , BE и CF . P и Q лежат на отрезках AB и AC соответственно так, что прямая PQ параллельна BC . Окружности построенные на BQ и CP , как на диаметрах, пересекаются в точках R и T (R является ближе к A чем T). Пусть CM и BN — высоты в треугольнике BCR . Докажите, что прямые FM , NE и AD пересекаются в одной точке.
2. Для натурального числа A , определим $Z(A)$ как число A , записанное в обратном порядке (например, $Z(521) = 125$). Число A называется «**хорошим**», если в его десятичной записи нет нулей, первая цифра не равна последней, и $(Z(A))^2 = Z(A^2)$. Найдите все «хорошие» числа большие 10^6 .
3. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Найдите все такие функции $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^+$ выполнено

$$f(f(x) + y) - f(x) = \left(\frac{f(y)}{y} - 1 \right) \cdot x + f^{(m)}(y).$$

Здесь $f^{(m)}(y) = f(f(\dots f(y)\dots))$.
 m раз