

Математика пәні бойынша
Республикалық оқушылар олимпиадасының
қорытынды кезеңі (2021-2022 оқу жылы)

9-сынып, 2 тур

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут.

Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

4. Іргелес бұрыштардың биссектрисаларынан P және Q нүктелері алынды және осы іргелес бұрыштардың қабырғаларына PA , PB , QC және QD биіктіктері жүргізілді. AB , CD және PQ түзулері бір нүктеде қиылысатынын дәлелдеңіз
5. a , b , c оң сандары үшін, $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 3$ теңсіздігі орындалады. Келесі теңсіздікті дәлелдеңіз

$$\frac{a^3}{a^2 + b} + \frac{b^3}{b^2 + c} + \frac{c^3}{c^2 + a} \geq \frac{3}{2}.$$

6. 35-ке 35 кестесі берілген, оның ұяшықтарына 1-ден 49-ға дейінгі сандар кездейсоқ ретпен орналастырылған және әр i саны i рет қолданылған. Кестеден кейбір ұяшықтар кездейсоқ алынып тасталынады, содан кейін ол қабырға бойынша жалғанған ұяшықты көпбұрыштарға бөлінеді. Олардың ішінен ауданы ең үлкен болатын біреуі таңдалады (егер ондайдан бірнеше болса, онда кездейсоқ біреуі алынады). Таңдалған көпбұрышта кейбір санның кемінде 15 рет кездесуіне кепілдік беру үшін кестеден алып тастауға болатын ұяшықтардың ең көп саны қандай болуы мүмкін?

Заключительный этап
Республиканской олимпиады школьников
по математике (2021-2022 учебный год)

9 класс, 2 тур

Время работы: 4 часа 30 минут.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

4. На биссектрисах смежных углов выбраны точки P и Q , из которых опущены перпендикуляры на стороны этих смежных углов: PA , PB , QC , QD . Докажите, что прямые AB , CD и PQ пересекаются в одной точке.
5. Положительные числа a , b , c таковы, что $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 3$. Докажите, что

$$\frac{a^3}{a^2 + b} + \frac{b^3}{b^2 + c} + \frac{c^3}{c^2 + a} \geq \frac{3}{2}.$$

6. Дана таблица 35 на 35, в клетках которой случайным образом расставлены числа от 1 до 49, причем каждое число i использовалось i раз. Из таблицы наудачу удаляются некоторые клетки, после чего она распадается на связные по сторонам клетчатые многоугольники. Из них выбирается один с наибольшей площадью (если таких несколько, то берется случайный). Какое наибольшее количество клеток можно было удалить из таблицы, чтобы некоторое число гарантированно встретилось в выбранном многоугольнике хотя бы 15 раз.