Решение задач республиканской олимпиады по физике-2022
10 класс

Задача 1. «Солянка» (10.0 балла)

Эта задача состоит из трех независимых частей.

Часть 1.1 (3.0 балла)

1) При включенном ключе конденсатор теряет заряд, при выключенном, получает. В состояние равновесие заряд полученный должен быть равен потерянному в одном цикле.

$$I_- = \frac{U}{R} \qquad (1) \qquad \textbf{[0.25 балла]}$$

$$I_+ = \frac{\varepsilon - U}{2R} \qquad (2) \qquad \textbf{[0.25 балла]}$$

$$0 = 2tI_- - tI_+ \qquad (3) \qquad \textbf{[0.25 балла]}$$

Тогда напряжение на конденсаторе

$$U = \frac{\varepsilon}{2} \qquad (4) \qquad \textbf{[0.25 балла]}$$

2) Определим зависимость тока на ключе от времени начиная с момента, когда ключ перестали периодически замыкать, и оставили в замкнутом режиме.

$$I_K = I_e + I_C \qquad (5) \qquad \textbf{[0.5 балла]}$$

$$I_e = \frac{\varepsilon}{R} = const \qquad (6) \qquad \textbf{[0.5 балла]}$$

$$I_C(t) = \frac{U}{R} exp\left(-\frac{(-t)}{RC}\right) = \frac{\varepsilon}{2R} exp\left(-\frac{(-t)}{RC}\right) \qquad (7) \qquad \textbf{[0.5 балла]}$$

$$I_K = \frac{\varepsilon}{2R}\left(2 + exp\left(-\frac{(-t)}{RC}\right)\right) \qquad (8) \qquad \textbf{[0.5 балла]}$$

I_C - ток разрежающегося конденсатора.

Часть 1.2 (4.0 балла)

КПД цикла определяется как

$$\eta = \frac{A}{Q_+} \qquad (1) \qquad \textbf{[0.25 балла]}$$

$$A = \frac{2p_0V_0}{2} = p_0V_0 \qquad (2) \qquad \textbf{[0.25 балла]}$$

$$Q_+ = Q_{12} + Q_{23+} \qquad (3) \qquad \textbf{[0.25 балла]}$$

$$Q_{23} = Q_{23+} + Q_{23-} \quad (4) \quad \textbf{[0.25 балла]}$$

Q_{23+} и Q_{23-} это положительный и отрицательные составляющие полной теплоты в процессе $2-3$. Для того чтобы их найти напишем первое начало термодинамики и уравнение процесса $2-3$:

$$p(V) = 4p_0 - V\frac{p_0}{V_0} \quad (5) \quad \textbf{[0.25 балла]}$$

$$dp = -dV\frac{p_0}{V_0} \quad (6) \quad \textbf{[0.25 балла]}$$

$$dQ = dU + dA \quad (7) \quad \textbf{[0.25 балла]}$$

$$dQ = \frac{3}{2}RdT + pdV \quad (8) \quad \textbf{[0.25 балла]}$$

$$dQ = \frac{3}{2}(pdV + Vdp) + pdV \quad (9) \quad \textbf{[0.25 балла]}$$

$$dQ = \frac{5}{2}pdV + \frac{3}{2}Vdp \quad (10) \quad \textbf{[0.25 балла]}$$

$$Q = \frac{5}{2}\left(4p_0 - V\frac{p_0}{V_0}\right)dV - \frac{3}{2}\left(\frac{p_0}{V_0}\right)VdV \quad (11) \quad \textbf{[0.25 балла]}$$

$$Q = \left(10p_0 - 4\frac{p_0}{V_0}V\right)dV \quad (12) \quad \textbf{[0.25 балла]}$$

Из последнего уравнения видно, что газ получает тепло до $V = 2.5 \cdot V_0$, и после отдает среде. Взяв интеграл этого уравнения от V_0 до $2.5V_0$, можем найти Q_{23+}.

$$Q_{23+} = \int_{V_0}^{2.5V_0}\left(10p_0 - 4\frac{p_0}{V_0}V\right)dV = 4.5\,p_0V_0 \quad (13) \quad \textbf{[0.25 балла]}$$

Так как процесс $1-2$ является изохорным процессом можем найти Q_{12}и Q_+.

$$Q_{12} = 3p_0V_0 \quad (14) \quad \textbf{[0.25 балла]}$$

$$Q_+ = Q_{12} + Q_{23+} = 7.5p_0V_0 \quad (15) \quad \textbf{[0.25 балла]}$$

Отсюда получаем ответ

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{4}{15} \quad (16) \quad \textbf{[0.25 балла]}$$

Часть 1.3 (3.0 балла)

$$sin\beta = \frac{sin\alpha}{n} \qquad (1)$$

$$S = Htg\alpha + htg\beta \qquad (2) \qquad \textbf{[0,5 балла]}$$

Видимое расстояние

$$S' = (H+h)tg\alpha \qquad (3) \qquad \textbf{[0,5 балла]}$$

Ошибка наблюдателя:

$$\Delta S = h(tg\alpha - tg\beta) \qquad (4) \qquad \textbf{[0,5 балла]}$$

где α – решение уравнения (2)

Действительная скорость рыбы

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{H}{cos^2\alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{h}{cos^2\beta}\frac{d\beta}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} \qquad (5) \qquad \textbf{[0,5 балла]}$$

$$= (\frac{H}{cos^2\alpha} + \frac{h}{cos^2\beta}\frac{cos\alpha}{ncos\beta})\frac{d\alpha}{dt}$$

Выше использовано

$$\frac{d(sin\beta)}{d\alpha} = \frac{d(sin\beta)}{d\beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = cos\beta\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{d\left(\frac{sin\alpha}{n}\right)}{d\alpha} = \frac{cos\alpha}{n}$$

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{cos\alpha}{ncos\beta}$$

Видимая скорость рыбы

$$v' = \frac{dS'}{dt} = \frac{H+h}{cos^2\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = v\frac{n(H+h)cos\alpha cos^3\beta}{nHcos^3\beta + hcos^3\alpha} \qquad (6) \qquad \textbf{[0,5 балла]}$$

$$v' = v\frac{H+h}{H/cos\alpha + hcos^3\alpha/n(1-\frac{sin^2\alpha}{n^2})^{3/2}} \qquad (7) \qquad \textbf{[0,5 балла]}$$

Задача 2. Дорога на Марс (10.0 балла)

1. Можно воспользоваться третьим законом Кеплера.

$$\frac{a^3}{T^2} = const \qquad (1) \qquad \textbf{[0.5 балла]}$$

$$rv^2 = const \qquad (2) \qquad \textbf{[0.25 балла]}$$

$$v_m = \frac{v_e}{\sqrt{1.5}} \qquad (3) \qquad \textbf{[0.25 балла]}$$

2. Можем написать закон сохранения энергии и импульса для орбиты ракеты. Обозначим v_1 скорость на перицентр и v_2 скорость на апоцентр.

$$m v_1 r_e = m v_2 r_m \qquad (4) \qquad \textbf{[0.75 балла]}$$

$$\frac{m v_1^2}{2} - G\frac{mM}{r_e} = \frac{m v_2^2}{2} - G\frac{mM}{r_m} \qquad (5) \qquad \textbf{[0.75 балла]}$$

Закон Ньютона для земли:

$$\frac{m v_e^2}{r_e} = G\frac{mM}{r_e^2} \qquad (6) \qquad \textbf{[0.75 балла]}$$

Из этих трех уравнений:

$$\alpha = \frac{r_e}{r_m} = \frac{1}{1.5} \qquad (7) \qquad \textbf{[0.5 балла]}$$

$$v_1 = v_e\sqrt{\frac{2}{1+\alpha}} \qquad (8) \qquad \textbf{[0.5 балла]}$$

Для того чтобы ракета имела скорость v_1 на орбите Солнца, на поверхностности Земли скорость должна быть v:

$$v^2 = (v_1 - v_e)^2 + v_{II}^2 \qquad (9) \qquad \textbf{[0.5 балла]}$$

где v_{II} - вторая космическая скорость.

$$v = 11.56 \text{ км/с} \qquad (10) \qquad \textbf{[0.25 балла]}$$

3. Можно воспользоваться третьим законом Кеплера.

$$\frac{a^3}{T^2} = const \qquad (11)$$

$$\frac{r_e^3}{T_e^2} = \frac{\left(\frac{r_e + r_m}{2}\right)^3}{T_x^2} \qquad (12) \qquad \textbf{[1.0 балл]}$$

$$t = \frac{T_x}{2} \approx 255 \text{ дней} \qquad (13) \qquad \textbf{[1.0 балл]}$$

4. Определим частоту отправления ракеты

$$\omega_e = \frac{v_e}{r_e} \quad (14) \qquad \textbf{[0.5 балла]}$$

$$\omega_m = \frac{v_m}{r_m} \quad (15) \qquad \textbf{[0.5 балла]}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_e - \omega_m} \approx 2.2 \text{ года} \quad (16) \qquad \textbf{[1.0 балл]}$$

5. Можно воспользоваться той же формулой что и в пункте 2, но нужно поменять радиус Марса на радиус Венеры.

$$v = 11.54 \text{ км/с} \quad (17) \qquad \textbf{[1.0 балл]}$$

Задача 3. Законы сохранения в магнитном поле и поток, который не хочет меняться (10.0 балла)

3.1. Согласно закону Фарадея

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} < 0 \quad (1) \qquad \textbf{[0.25 балла]}$$

$$\mathcal{E} = \sum \vec{E}\,\overrightarrow{\Delta l} < 0 \quad (2) \qquad \textbf{[0.25 балла]}$$

то есть напряженность поля $\vec{E}$ противоположено направлена направлению обхода контура и направлена против часовой стрелки.

3.2 Каждый элемент контура создает в контуре магнитное поле, направленное «к нам». Суммарное поле также направлено «к нам», то есть сопротивляется изменению потока поля.

[0.5 балла]

3.3 ЭДС индукции (по модулю)

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = B\frac{dS}{dt} = Ba\frac{dl}{dt} = Bav \quad (3) \qquad \textbf{[0.25 балла]}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Bav}{R} \quad (4) \qquad \textbf{[0.25 балла]}$$

3.4 Сила Ампера

$$F = IBa = \frac{B^2a^2v}{R} \quad (5) \qquad \textbf{[0.5 балла]}$$

Опираясь на результаты пункта 3.1 – если магнитное поле направлено «от нас», то индукционный ток направлен против часовой стрелки, а сила Ампера «из поля», сопротивляясь внесению рамки.

Если же поле направлено «к нам», то ток идёт по часовой стрелке, и сила Ампера по-прежнему сопротивляется внесению рамки.

3.5

$$N = Fv = IBav = \frac{B^2a^2v^2}{R} \qquad (6) \qquad \textbf{[0.5 балла]}$$

3.6

$$N = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{B^2a^2v^2}{R} \qquad (7) \qquad \textbf{[1.0 балл]}$$

что совпадает с результатом пункта 3.5, то есть работа внешних сил по внесению рамки в поле, в любой момент целиком идёт на выделение теплоты в рамке.

3.7 И снова сила Ампера сопротивляется изменению системы

$$-IBa = -\frac{B^2a^2v}{R} = m\frac{dv}{dt} \qquad (8) \qquad \textbf{[0.5 балла]}$$

$$ds = -\frac{mR}{B^2a^2}\,dv \qquad (9) \qquad \textbf{[0.25 балла]}$$

$$\Delta v = (0 - v_0) = v_0 = \frac{B^2a^2}{mR}\,\Delta s = \frac{B^2a^3}{mR} \qquad (10) \qquad \textbf{[0.5 балла]}$$

$$v_0 = 0{,}9\ \text{мм/с} \qquad (11) \qquad \textbf{[0.25 балла]}$$

3.8 При движении вниз вдоль плоскости поток магнитного поля растёт, если выбрать направление нормали вниз перпендикулярно плоскости. Индукционный ток при этом направлен против часовой стрелки при взгляде сверху. Сила Ампера, как обычно, сопротивляется изменению системы.

$$mgsin\alpha - IBl = ma \qquad (12) \qquad \textbf{[0.5 балла]}$$

$$\mathcal{E} = Blv = \frac{q}{C} \qquad (13) \qquad \textbf{[0.5 балла]}$$

Беря производную от последнего выражения по времени, получим

$$Bla = \frac{I}{C} \qquad (14) \qquad \textbf{[0.5 балла]}$$

а затем, подставляя (13) в (11), получим

$$a = \frac{mgsin\alpha}{m + CB^2l^2} \qquad (15) \qquad \textbf{[0.5 балла]}$$

$$I = CBl\frac{mgsin\alpha}{m + CB^2l^2} \qquad (16) \qquad \textbf{[0.25 балла]}$$

$$q = It = CBl\frac{mgsin\alpha}{m + CB^2l^2}t \qquad (17) \qquad \textbf{[0.25 балла]}$$

3.9

$$A = mgsin\alpha a\frac{t^2}{2} = \frac{m^2g^2sin^2\alpha}{m + CB^2l^2}\frac{t^2}{2} \qquad (18) \qquad \textbf{[1.0 балл]}$$

$$E_k = m\frac{(at)^2}{2} = \frac{m^3g^2sin^2\alpha}{(m + CB^2l^2)}\frac{t^2}{2} \qquad (19) \qquad \textbf{[0.5 балла]}$$

$$E_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{CB^2l^2m^2g^2sin^2\alpha}{(m + CB^2l^2)}\frac{t^2}{2} \qquad (20) \qquad \textbf{[0.5 балла]}$$

$$E = E_k + E_e = \frac{m^3g^2sin^2\alpha}{(m + CB^2l^2)}\frac{t^2}{2} + \frac{CB^2l^2m^2g^2sin^2\alpha}{(m + CB^2l^2)}\frac{t^2}{2}$$

$$E = \frac{m^2g^2sin^2\alpha}{m + CB^2l^2}\frac{t^2}{2} = A \qquad (21) \qquad \textbf{[0.5 балла]}$$

Работа сил тяжести целиком идёт на рост полной энергии системы.