Решение задач республиканской олимпиады по физике-2022
9 класс

Задача 1 [5 баллов].

Записываем Закон Снелля для поверхностей воды и воздуха

$$1.33 sin\, i_1 = sin\, i_2 \qquad (1) \qquad [0.5 \text{ балла}]$$

Используем приближение для малых углов

$$1.33 i_1 = i_2 \qquad (2) \qquad [0.5 \text{ балла}]$$

Записываем отношение сторон

$$i_2 \approx \frac{OQ}{OP'} \qquad (3) \qquad [0.5 \text{ балла}]$$

$$i_1 \approx \frac{OQ}{OP} \qquad (4) \qquad [0.5 \text{ балла}]$$

Подставляя уравнения (3) и (4) в уравнение (2)

$$OP' = \frac{1}{1.33} OP = 45 \text{ см} \qquad (5) \qquad [1 \text{ балл}]$$

Расстояние от линзы до изображения рыбы в воде

$$d_0 = 30\text{см} + 45\text{см} = 75 \text{ см} \ (6) \qquad [0.5 \text{ балла}]$$

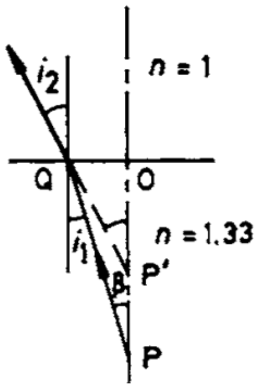
Используем формулу тонкой линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_i} \qquad (7) \qquad [0.5 \text{ балла}]$$

Получаем конечный ответ

$$d_i = \frac{F d_0}{d_0 - F} \qquad (8) \qquad [0.5 \text{ балла}]$$

$$d_i = -90\text{см} \qquad (9) \qquad [0.5 \text{ балла}]$$

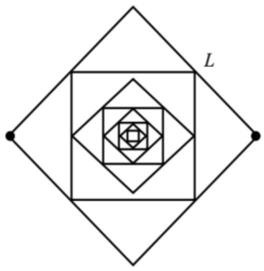


Примечание: При отсутствии пояснительного чертежа или каких-либо других пояснений баллы за пункты (3) и (4) не выставляются.

Задача 2 [6 баллов].

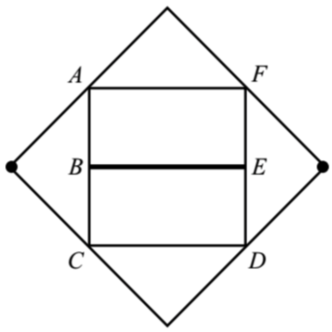
Пусть итоговое сопротивление между противоположными углами равно xR, где x - некий числовой коэффициент. Рассмотрим все квадраты, кроме двух самых больших. Обозначим эту систему резисторов как $\boldsymbol{S_3}$. $\boldsymbol{S_3}$ идентичен исходной схеме, за исключением того, что он уменьшен в 2 раза. Следовательно, сопротивление между правым и левым углами S_3 равно xR/2 (поскольку все поперечные сечения одинаковы, а сопротивление пропорционально длине).

Из симметрии левой и правой стороны, все точки на вертикальной биссектрисе приведенной ниже схемы имеют одинаковый потенциал. Таким образом, мы можем отделить верхний и нижний углы S_3 от горизонтальных линий, которых они касаются, как показано на рисунке.



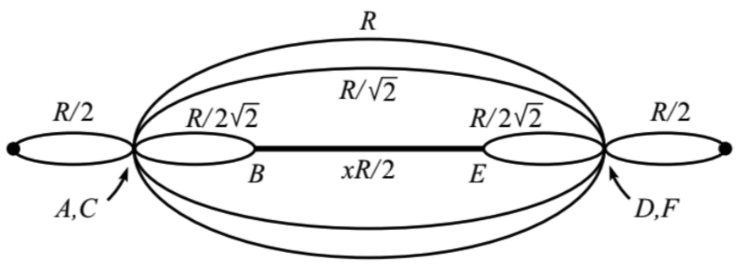
(1) [0.5 балла]

Затем мы можем думать о S_3 как об эффективном резисторе с сопротивлением xR/2, как показано на рисунке.



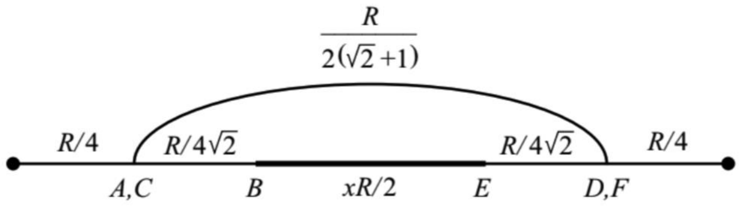
(2) [0.5 балла]

Теперь мы можем упростить эту схему, отметив симметрию верх-низ, которая говорит нам, что мы можем объединить точку A с C, а также точку D с F. (Обратите внимание, что мы не можем объединить B с A, C или E с D, F.) В результате приходим к:



(3) [0.8 балла]

Уменьшенив количества ветвей:



(4) [0.7 балла]

От верхнего рисунка находим сопротивление:

$$xR = \frac{R}{2} + \left(\frac{1}{\frac{R}{2(\sqrt{2}+1))}} + \frac{1}{\frac{R}{2\sqrt{2}} + \frac{xR}{2}}\right)^{-1} \qquad (5) \quad [1.5 \text{ балла}]$$

Теперь мы должны найти x. Постепенное упрощение дает:

$$2x - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}x+1}} \qquad (6) \quad [0.5 \text{ балла}]$$

$$(2x-1)((2+\sqrt{2})x + 2\sqrt{2}+1) = \sqrt{2}x + 1$$

$$(2+\sqrt{2})x^2 + \sqrt{2}x - -(\sqrt{2}+1) = 0$$

$$x^2 + (\sqrt{2}-1)x - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1) \approx 0.659 \qquad (7) \quad [1.0 \text{ балла}]$$

$$R_{final} \approx 0.659R \qquad (8) \quad [0.5 \text{ балла}]$$

Задача 3 [6 баллов].

1) Используем идею, что изменение температуры $\Delta T = 5$℃ в каждом случае мало

$$\Delta T = 5℃ \Rightarrow \text{малое изменение} \qquad (1) \quad [0.5 \text{ балла}]$$

Считаем, что мощность потерь тепла постоянна и находим среднюю температуру

$$< T_1 >= 2.5℃, < T_2 >= 42.5℃, < T_3 >= 82.5℃ \qquad (2) \quad [0.5 \text{ балла}]$$

Записываем уравнение для потоков тепла

$$cm\frac{\Delta T}{\Delta t} = P_{плита} - P_{потери} \qquad (3) \quad [0.5 \text{ балла}]$$

Подставляя зависимость потерь тепла от разности температур

$$cm\frac{\Delta T}{\Delta t} = P_{плита} - \alpha(< T > - T_0) \qquad (4) \quad [0.5 \text{ балла}]$$

Считаем $cm\frac{\Delta T}{\Delta t}$ для каждого промежутка

$$cm\frac{\Delta T}{\Delta t_1} = 1235, \qquad (5) \quad [0.5 \text{ балла}]$$

$$cm\frac{\Delta T}{\Delta t_2} = 708, \qquad (6) \quad [0.5 \text{ балла}]$$

$$cm\frac{\Delta T}{\Delta t_3} = 188 \qquad (7) \quad [0.5 \text{ балла}]$$

Строим зависимость $cm\frac{\Delta T}{\Delta t}$ от $< T >$ (8) [1 балл]

Показываем, что точки лежат на одной прямой (9) [0.5 балла]

2) Определяем градиент графика $cm\frac{\Delta T}{\Delta t}(<T>)$ и приравниваем к α

$$\frac{cm\frac{\Delta T}{\Delta t_1}-cm\frac{\Delta T}{\Delta t_3}}{<T_3>-<T_1>} = \alpha \qquad (10) \qquad [0.5 \text{ балла}]$$

Конечный ответ

$$\alpha = 13\frac{Вт}{℃} \qquad (11) \qquad [0.5 \text{ балла}]$$

Задача 4 [7 баллов].

а) В этом случае астероиды подвергаются равномерному круговому движению с радиусом l/2 и скоростью v_0, так

$$\frac{Gm^2}{l^2} = \frac{mv_0^2}{l/2} \quad \Rightarrow \quad \frac{Gm}{v_0^2 l} = 2. \qquad (1) \qquad [1 \text{ балл}]$$

б) Астероиды следуют по замкнутым орбитам, если у них недостаточно энергии, чтобы уйти в бесконечность, т.е. Если общая энергия системы отрицательна,

$$E = 2\cdot\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{Gm^2}{l} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Gm}{v_0^2 l} > 1. \qquad (2) \qquad [1 \text{ балл}]$$

в) Обратите внимание, что астероиды всегда будут двигаться симметрично относительно центра масс. Таким образом, чтобы быть на минимальном расстоянии, их скорости должны быть перпендикулярны соединяющей их линии (и будут противоположно направлены). Пусть минимальное расстояние равно d, и пусть скорость каждой массы при минимальном разделении равна v. Угловой момент тогда равен

$$L = 2*\frac{mvd}{2} = mvd \qquad (3) \qquad [1 \text{ балл}]$$

Начальный угловой момент аналогично равен mv_0l, поэтому при сохранении углового момента

$$v = v_0\frac{l}{d} \qquad (4) \qquad [1 \text{ балл}]$$

По закону сохранения энергии:

$$2\cdot\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{Gm^2}{l} = 2\cdot\frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gm^2}{d}$$

$$v_0^2 - \frac{Gm}{l} = v^2 - \frac{Gm}{d}.$$

$$v_0^2 - \frac{Gm}{l} = v_0^2\frac{l^2}{d^2} - \frac{Gm}{d}.$$

(5) [1 балл]

Запишем параметр $\alpha = \frac{Gm}{l\cdot v_0^2}$

$$(1-\alpha)\left(\frac{d}{l}\right)^2+\alpha\left(\frac{d}{l}\right)-1=0.$$

Решение квадратного уравнения имеет следующие корни

$d = l$ или $d = \frac{l}{\alpha-1}$ (6) [1 балл]

Второй корень физически возможен только в том случае, если $\alpha > 1$, и он является наименьшим, только если $\alpha > 2$. Тогда минимальное расстояние равно

$$d=\begin{cases} l & \alpha\le 2 \\ l/(\alpha-1) & \alpha>2. \end{cases}$$

(7) [1 балл]

Задача 5 [6 баллов].

1) Цилиндры теряют контакт между собой

$N_c = 0$ (1) [0.5 балла]

Второй Закон Ньютона на ось x для правого цилиндра

$Ma = N_b \sin \pi/6 = N_b/2$ (2) [0.5 балла]

Равенство сил по вертикали для верхнего цилиндра

$Mg = N_b \cos \pi/6 + N_a \cos \pi/6$ (3) [0.5 балла]

Второй Закон Ньютона на ось x для левого цилиндра

$N_a \sin \pi/6 = N_a/2 = F - Ma = 2Ma$ (4) [0.5 балла]

Используя уравнения (1) – (4), получаем

$Mg = (2Ma + 4Ma) * \frac{\sqrt{3}}{2}$ (5) [0.5 балла]

$a_{min} = \frac{g}{3\sqrt{3}}$ (6) [0.5 балла]

Примечание: Если в решении используется $N_a = N_b$, то за пункты (2) – (10) баллы не даются. Если не имеется пояснение сил на чертеже, то баллы за уравнения не ставятся.

2) Максимальное ускорение достигается тогда, когда верхний цилиндр теряет контакт с правым

$N_b = 0$ (7) [0.5 балла]

Записываем равенство сил по вертикали для верхнего цилиндра

$Mg = N_a \cos \pi/6$ (8) [0.5 балла]