7 класс. Решения

1. Даны две обыкновенные несократимые дроби. У первой сумма числителя и знаменателя равна 1232, а у второй такая сумма равна 7987. Может ли сумма этих двух дробей равна $\frac{17}{35}$?

Решение: Пусть $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ данные дроби. Очевидно, что если a делится на 7 то и b делится на 7 так как 1232 делятся на 7. Аналогично для второй дроби. Следовательно a, b, c, d не делятся на 7. Но тогда знаменатель суммы дробей не делится на 7, а, значит, не может равнятся 35.

2. Дан треугольник ABC, в котором $BC = 2AB$.Точка $D-$ середина стороны BC, точка $K-$ середина отрезка BD. Докажите, что $AC = 2AK$.

Решение: Заметим, что $BD = \frac{BC}{2} = AB$, поэтому треугольник ABD – равнобедренный с $AB = BD$. Пусть E – середина AB. Тогда $BE = \frac{AB}{2} = \frac{BD}{2} = BK$. Следовательно, $\triangle ABK = \triangle DBE$, и как следствие, $AK = DE$. С другой стороны, DE является средней линией стороны AC в треугольник ABC. Значит $AC = 2DE = 2AK$, что и требовалось доказать.

3. Известно, что $\overline{a...a}$ кратно $\overline{b...b}$. Обязательно ли количество цифр первого числа делится на количество цифр второго?

Решение: Пусть n — количество цифр числа $\overline{a\dots a}$, m — количество цифр числа $\overline{b\dots b}$.

Обозначим $\mathbf{1}_m = \underbrace{1\dots1}_{m \text{ единиц}}$.

Заметим, что $\overline{b\dots b} \,\vdots\, \underbrace{1\dots1}_{m \text{ единиц}}$. Тогда $\underbrace{a\dots a}_{n \text{ единиц}}$ делится на $X = \underbrace{1\dots1}_{m \text{ единиц}}$. Очевидно, что $n \geq m$. Можем считать, что $n > m$ (иначе обязательно следует, что $n = m$ и задача решена). Отсюда $A - X$ делится на $X \Leftrightarrow \underbrace{a\dots a}_{n-m \text{ единиц}}$ делится на $X = \underbrace{1\dots1}_{m \text{ единиц}}$. Продолжая процесс, получим, что $n = mk$ для некоторого целого k, ч.т.д.

4. Дана клеточная таблица 5×5, в которой во всех клетках написано число 0. За одну операцию разрешается увеличить на 1 все числа в клетках, которые образуют уголок. Докажите, что за несколько таких операций числа во всех клетках таблицы не смогут стать одинаковыми. Уголком считается фигура, которая получается при удалении из квадрата 2×2 одной клетки.

Ответ: нет, таких чисел не существует.

Решение: Допустим мы смогли за несколько операций получить, что в каждой клетке написано число k Раскрасим клетки доски следующим образом: в рядах с нечетным номером (нумерация снизу вверх) 12121, а в рядах с четным номером 34343. Тогда клеток 19 штук, 2 и 3 по 6 и клетки цвета 44 штуки. Заметим, что уголок из 3 клеток покрывает либо $1, 2, 3$ либо $1, 2, 4$ либо $1, 3, 4$ либо $2, 3, 4$. Обозначим a, b, c, d как количество уголков каждого вида уголка. Тогда можно понять, что

$$a + b + c = 9k$$

$$a + b + d = 6k$$

$$a + c + d = 6k$$

$$b + c + d = 4k$$

Сложив последние три равенства, получаем $16k = 2a + 2b + 2c + 3d \geq 2(a + b + c) = 18k$. Но k положительное, поэтому изначальное предположение неверно.

7 класс. Схема оценивания

Задача 1.

Пункт 1. Доказано, что a, b, c и d не кратны 7 - 5 баллов

Пункт 2. Показано, что знаменатель суммы дробей, равный 35, не делится на 7, тем самым приходя к противоречию - 2 балла.

Задача 2.

Пункт 1. Корректно доказано, что $ABK = DBE$ - 6 баллов.

Пункт 2. Завершение доказательства - 1 балл.

Пункт 3. Незначительная ошибка в решениях - (-1) балл.

Пункт 4. Полное решение - 7 баллов.

Задача 3.

Пункт 1. $\overline{1...1}$ кратно $\overline{1...1}$ -1 балл.

Пункт 2. Если использывано но не доказано, что a делится на b -(-1) балл.

Пункт 3. Использовано $\underbrace{\overline{1\ldots1}}_{m} \vdots \underbrace{\overline{1\ldots1}}_{n} \iff m \vdots n$ без доказательства -0 баллов.

Пункт 4. Правильное решение с полным доказательством - 7 баллов.

Задача 4.

Пункт 1. Раскраска таблицы в ≥ 3 цвета - 1 балл.

Пункт 2. Раскраска в четыре цвета как в официальном решении - 3 балла.

Пункт 3. Правильное решение с полным доказательством - 7 баллов.

Пункты не суммируются.